微积分 A 历年考试真题集

目 录

清华大学 2006 级一元微积分期中考试试题

2006.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$, 则 $a+b=$__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin 2x}}=$__________.

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+xf(x)}{x^2}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=$__________.

4. 已知 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\left(\dfrac{4}{3}+a\cos x\right)\sin x$ 为 x 的五阶无穷小量, 则 $a=$__________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x-x^2}{\sin x^2}=$__________.

6. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$__________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=$__________.

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=$__________.

9. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\cos x^2}$, 则 $f'(x)=$__________.

10. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0)=$__________.

11. 函数 $f(x)=x|x^3+x^2-2x|$ 的不可导点的个数为__________.

12. 曲线 $y=x+\sqrt{x^2-x+1}$ 在 $x\to +\infty$ 时的渐近线方程为__________.

13. 设 $f(x)=\arctan x$, 则 $f''(x)=$__________.

14. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x}+xy=0$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 点处的切线方程为__________.

15. 函数 $y=2x+\sin x$ 的反函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 已知函数 $y(x)$ 有参数形式 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$ 在 $x_0=0$ 处的带有 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式.

3. 根据正整数 n 奇偶性的不同情况, 分别讨论函数 $f(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}$ 的单调性, 求函数在实数范围内的最值, 并画出其图像.

4. 已知 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续可导函数, $g(x)=f(x|x|)$.
(1) 求证: $g(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数;

【下一页还有试题……】

(2) 计算 $g'(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 设 $f(x)\in\mathcal{C}[0,+\infty)$, $f(0)=0$, 在 $x>0$ 处 $f'(x)$ 存在且单调递增. 证明: 当 $x>0$ 时, $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递增.

2. (*7* 分) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (α,β) 内二阶可导, 且其图像在 (α,β) 内有三个点满足关系 $y=ax^2+bx+c$.

(1) 证明: 必然存在一个点 $\xi\in(\alpha,\beta)$, 使得 $f''(\xi)=2a$;

(2) 写出此命题的一个推广命题.

答案与提示

(说明*: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.*)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. -5 **2.** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ **3.** $\dfrac{1}{2}$ **4.** $-\dfrac{1}{3}$ (提示*: Taylor* 展开*.*) **5.** $-\dfrac{3}{2}$ **6.** 1 (提示*:* 令 $t:=\dfrac{1}{x}$ 并取对数*.*)

7. $-\dfrac{1}{2}$ (提示*:* 分子有理化*.*) **8.** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$ **9.** $-2x\sin x^2\mathrm{e}^{\cos x^2}$ **10.** $n!$ (提示*:* 利用导数定义*.*) **11.** 2

12. $y=2x-\dfrac{1}{2}$ **13.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ **14.** $x+y=0$ **15.** $\dfrac{1}{2+\cos x}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2t}$ (*5* 分), $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$ (*5* 分).

2. $\dfrac{x}{x^2-x-2}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x^k+(-1)^{n+1}\left[\frac{2}{(\theta x-2)^{n+2}}-\frac{1}{(\theta x-1)^{n+2}}\right]x^{n+1},\theta\in(0,1)$
(*展开式 6 分; Lagrange 余项 4 分, 写为 Peano 余项得 2 分*).

3. $f'(x)=(n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$. (i) $n=1$ 时, 驻点为 $x=1$, 在 $(-\infty,1)$ 上递增, 在 $(1,+\infty)$ 上递减, 故有最大值 e^{-1} 而无最小值. (*2* 分) (ii) $n=2k+1(k\in\mathbb{Z}^+)$ 为奇数时, 驻点为 $x=n$ 与 $x=0$, 在 $(-\infty,n)$ 上递增, 在 $(n,+\infty)$ 上递减, 故有最大值 $n^n\mathrm{e}^{-n}$ 而无最小值. (*2* 分) (iii) $n=2k(k\in\mathbb{Z}^+)$ 为偶数时, 驻点为 $x=n$ 与 $x=0$, 在 $(-\infty,0)$ 上递减, 在 $(0,n)$ 上递增, 在 $(n,+\infty)$ 上递减, 故有最小值 0 而无最大值. (*3* 分) 函数图像略. (*3 分, 每种情况 1 分*)

4. (1) $g(x)=\begin{cases}f(x^2) & x\geq 0\\ f(-x^2) & x<0\end{cases}$, 在 $x\neq 0$ 处显然可导. 在 $x=0$ 处, 利用导数定义及 L'Hospital 法则可得 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$, 故 $g(x)$ 可导. (*5* 分). (2) $g'(x)=\begin{cases}2xf'(x^2) & x>0\\ 0 & x=0\\ -2xf'(-x^2) & x<0\end{cases}$. (*5* 分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $F(x):=\dfrac{f(x)}{x}$, 则 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. (*4* 分). 由 Rolle 中值定理, $\exists\xi\in(0,x):f(x)-f(0)=f'(\xi)x$. (*2* 分) 故 $F'(x)=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0$, 从而 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递增. (*2* 分)

2. (1) 记 $F(x):=f(x)-(ax^2+bx+c)$, 则 F 在 (α,β) 内二阶可导. 由已知条件, $\exists u<v<w\in(\alpha,\beta)$: $F(u)=F(v)=F(w)=0$, 故由 Rolle 中值定理知 $\exists\xi_1\in(u,v),\xi_2\in(v,w):F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. (*2* 分) 因此, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(\alpha,\beta):F''(\xi)=f''(\xi)-2a=0$, 即得. (*2* 分) (2) 凡与本题有关且正确的推广命题皆可. (*3* 分)

清华大学 2007 级一元微积分期中考试试题

2007.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $f(x) = x^2\cos x$, 则 $f^{(30)}(x) =$__________.

2. 设 $f'(a)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(a) - f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)\right] =$__________.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1} & |x| \neq 1 \\ 0 & |x| = 1 \end{cases} =$__________.

4. 设 m, n 是正整数, 则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} =$__________.

5. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ 给出 $(f''(t_0) \neq 0)$, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $(x_0, y_0) = (f'(t_0), t_0 f'(t_0) - f(t_0))$ 点的切线方程是__________.

6. 设方程 $y = F(x^2+y^2) + F(x+y)$ 确定 y 是 x 的函数, 其中 $F(u)$ 可导, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$__________.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} =$__________.

8. 设 $f(x) = \cos^2(ax)$, 则 $f^{(5)}(x) =$__________.

9. 函数 $y = \sqrt{x^2+x+1}$ 当 $x \to +\infty$ 时的渐近线为__________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin x}}{x - \sin x} =$__________.

11. 当 $x > 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x) =$__________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{x^2} =$__________.

13. 函数 $f(x) = \dfrac{x}{3} - x^{\frac{2}{3}}$ 的单调减区间为__________.

14. 设 $\begin{cases} x = 1 + \mathrm{e}^t \\ y = t\mathrm{e}^t \end{cases}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$__________, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$__________.

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 点可导, 且 $f(a) \neq 0$. 计算 $I = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$.

2. 设 $y = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$, 求 $y^{(n)}(x)$.

3. 求常数 a 的范围, 使不等式 $\ln x \leq a(x-1)$ 对于任何 $x > 0$ 都成立.

【下一页还有试题……】

4. 若 $f'(x)=1+x^2+x^3+o(x^3)(x\to 0)$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{f(x)-f(0)} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$.

(1) 当 a 取何值时 $g(x)$ 连续?

(2) 计算 $g(x)$ 到 3 阶的带 Peano 余项的 Taylor 公式.

5. 设 $g(0)=g'(0)=0$, $f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. 求 $f'(0)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*7 分*) 设 $0<a<b$, 证明: $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

2. (*8 分*) 已知 $f\in\mathcal{C}^{(2)}[0,1]$, $|f''(x)|\leq M$. 利用 Taylor 公式证明:

(1) 若 $f(0)=0$, 且 $f(x)$ 的最大值和最小值都在 $(0,1)$ 内部取得, 则 $|f(x)|\leq\dfrac{M}{2}$;

(2) 若 $f(0)=0$, $f(1)=0$, 则 $|f(x)|\leq\dfrac{M}{8}$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 870 **2.** $-f'(a)$ (提示: 利用导数定义.) **3.** $x=1$ **4.** $\dfrac{n}{m}$ **5.** $y=t_0x-f(t_0)$

6. $\dfrac{2xF'(x^2+y^2)+F'(x+y)}{1-2yF'(x^2+y^2)-F'(x+y)}$ **7.** e (提示: L'Hospital 法则.) **8.** $-16a^5\sin(2ax)$ (提示: 标准形式.)

9. $y=x+\dfrac{1}{2}$ **10.** 1 **11.** $x^x(\ln x+1)$ (提示: 对数求导.) **12.** 1 (提示: 分子有理化, Taylor 展开.)

13. $[0,8]$ **14.** $1+t$; e^{-t}

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题)

1. 令 $t:=\dfrac{1}{x}\to 0^+$, 记 $y:=\left[\dfrac{f(a+t)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{t}}$. 则 $\ln y=\dfrac{\ln|f(a+t)|-\ln|f(a)|}{t}$, $\lim\limits_{t\to 0^+}\ln y=\left.\dfrac{\mathrm{d}(\ln|f|)}{\mathrm{d}t}\right|_{x=a}=\dfrac{f'(a)}{f(a)}$, 故 $I=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$. 注: 若直接变形 $y=\left[1+\frac{f(a+t)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f(a+t)-f(a)}\cdot\frac{f(a+t)-f(a)}{tf(a)}}$, 则要求 $f(a+t)\neq f(a)$, 但这里不扣分.

2. $y=1+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}$ (*4 分*), 因此 $y^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{3}\left[2(x-2)^{-n-1}+(x+1)^{-n-1}\right]$ (*4 分*).

3. 记 $f(x):=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上连续. $x\neq 1$ 时, $f'(x)=\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$, 研究 $x-1-x\ln x$ 知其恒负, 故 $f(x)$ 单调递减. 进而在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上讨论知 $a=1$. (*8 分*)

4. (1) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$, 故 $a=1$ 时 $g(x)$ 连续. (*4 分*) (2) $g(x)=1-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{4}x^3+o(x^3)$. (*4 分*)

5. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ (*2 分*), 而 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\to g'(0)=0$ (*4 分*), 故 $f'(0)=0$ (*2 分*).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 两端为齐次式, 令 $x=\dfrac{b}{a}\in(1,+\infty)$, 即要证 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 并记 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$ (*2 分*). $f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$ (*2 分*), $f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}>0$ (*2 分*), 故 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 进而 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 即有 $f(x)>f(1)=0$. 移项即得所求式. (*2 分*)

2. (1) 设 $f(x)$ 在 $x_1,x_2\in(0,1)$ 处分别取最小、最大值 (且为极值点). 在 x_1 处由 Taylor 公式知 $f(x)=f(x_1)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)^2(\exists\xi)$. (*2 分*) 取 $x=0$ 知 $|f(x_1)|\leq\dfrac{M}{2}$. 同理 $|f(x_2)|\leq\dfrac{M}{2}$, 即得. (*2 分*) (2) 类似上一问, 仅需对 $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的情形分别讨论, 用邻近的端点放缩即可. (*4 分*)

清华大学 2008 级一元微积分期中考试试题

2008.11.7

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$, 则 $f^{(10)}(0)=$__________.

2. 设 $f'(a)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)-f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)\right]=$__________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的一个邻域内可导, 且满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的斜率为__________.

4. 点 $(1,0)$ 到抛物线 $y^2=x$ 的最短距离是__________.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}-\sqrt{1+\beta x}}{x}=$__________.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$__________.

7. 假设当 $x\to0$ 时, 函数 $(1-ax)^{\frac14}-1$ 和函数 $\sin x$ 是等价无穷小, 则 $a=$__________.

8. 函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 在闭区间 $[-2,2]$ 上的最大值为__________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x+a & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \end{cases}$, 则当 $a=$__________ 时, 函数 f 在 $x=0$ 处连续.

10. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos y=1$ 确定的可微隐函数, 则其导函数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=$__________.

12. 已知由方程 $x=1+y+y^3$ 确定了一个可微的隐函数 $y=y(x)$, 满足 $y(1)=0$, 那么其导函数在 $x=1$ 处的值 $y'(1)=$__________.

13. 函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$ 的斜渐近线方程为__________.

14. 由参数方程 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\mathrm{e}^t \end{cases}$ 表示的曲线在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right)$ 处的切线方程为__________.

15. 设 $f(x)=x^2$, $h(x)=f(1+g(x))$, 其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 的一个邻域内可导, 且 $g'(1)=h'(1)=1$, 则 $g(1)=$__________.

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ (旋轮线) 所确定的二阶连续可微函数. 计算 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 计算函数 $y(x)$ 的 n 阶导函数 $y^{(n)}(x)$, 其中函数 $y(x)$ 由下式给出: $y(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$.

3. 确定函数 $\ln(1+x^2)$ 的单调区间、凸性区间、极值以及拐点, 并画出该函数曲线的草图.

【下一页还有试题……】

4. 求函数 $y = \ln x$ 在 $x = 2$ 处带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 展开式.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内可导且 $f(a) = 0$. 若其绝对值函数 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处也可导, 求 $f'(a)$ 的值, 并说明理由.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上二阶可导. 进一步假设 $f(a) = f(b) = 0$, 且存在一点 $c \in (a,b)$ 使得 $f(c) > 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

2. (7 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 90 **2.** $-2f'(a)$ (提示: 利用导数定义.) **3.** -1 **4.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **5.** $\dfrac{\alpha}{m} - \dfrac{\beta}{n}$ (提示: L'Hospital 法则或 Taylor 展开.) **6.** 1 (提示: 取对数用 L'Hospital 法则.) **7.** -4 **8.** 4 **9.** 1 **10.** $\dfrac{e^{x+y}}{\sin y - e^{x+y}}$

11. 0 (提示: 作代换 $t = 1 - x \to 0^+$.) **12.** 1 **13.** $y = 2x - 2$ **14.** $y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}x$ **15.** $-\dfrac{1}{2}$

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题)

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$.

2. $y = \dfrac{7}{2(x-3)} - \dfrac{1}{2(x+1)} + 1$, $y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\dfrac{7}{2(x-3)^{n+1}} - \dfrac{1}{2(x+1)^{n+1}}\right]$.

3. 记 $f(x) := \ln(1+x^2)$, 则 $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(1-x^3)}{(x^2+1)^2}$. 故函数在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 有极小值 $f(0) = 0$; 函数在区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(1,+\infty)$ 上凸, 而在区间 $(-1,1)$ 下凸, 有拐点 $(\pm1, \ln 2)$.

4. 令 $t := x-2$, 则可化为 $y = \ln 2 + \ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right) \xlongequal{\text{Taylor}} \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}t^k}{k\cdot 2^k} + R_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}(x-2)^k}{k\cdot 2^k} + \dfrac{(-1)^n(x-2)^{n+1}}{(n+1)[\theta(x-2)+2]^{n+1}}$, 其中 $\theta \in (0,1)$.

5. 记 $g(x) := |f(x)|$, 则 $g'_+(a) = \lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h} \xlongequal{f(a)=0} \left|\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| = |f'(a)|$, 同理 $g'_-(a) = -|f'(a)|$, 故由 $g(x)$ 的可导性只能有 $f'(a) = 0$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 由已知条件及 Lagrange 中值定理: $\exists\alpha \in (a,c) : f'(\alpha) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$, $\exists\beta \in (c,b) : f'(\beta) = \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} < 0$. 而 $f' \in \mathcal{D}[\alpha,\beta]$, 故 $\exists\xi \in (\alpha,\beta) \subset (a,b) : f''(\xi) = \dfrac{f'(\alpha)-f'(\beta)}{\alpha-\beta} < 0$.

2. 记 $g(x) := (x+1)\ln x - (x-1)$, 则 $g'(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$, $g''(x) = \dfrac{x-1}{x^2}\begin{cases} >0 & x\in(1,+\infty) \\ <0 & x\in(0,1)\end{cases}$, 故导函数 $g'(x) \geq g'(1) = 1 > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 而 $g(1) = 0$, 故 $(x-1)g(x) \geq 0$, 移项整理即得.

清华大学 2010 级微积分 A(1) 期中考试试题

2010.11

(本卷后用作期中考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x =$__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - x}{\arcsin x + x} =$__________.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^3)} =$__________.

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} =$__________.

5. 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ 为 x^k 的同阶无穷小量, 则 $k=$__________.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 在 $x=1$ 处间断点的类型为__________.

7. 设 $y=x^x(x>0)$, 则其微分 $\mathrm{d}y=$__________.

8. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin(x^2+1)}$, 则 $f'(x)=$__________.

9. 设由 $\begin{cases} x=2t+\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$ 确定 $y=f(x)$, 则在 $x=0$ (即 $t=0$) 点, $f'(0)=$__________.

10. 设 $y=\mathrm{e}^x+\ln x(x>0)$, 则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$__________.

11. 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导函数 $(n\geq 1)$ $f^{(n)}(x)=$__________.

12. 函数 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为__________.

13. 设 $f(x)=|x-\sin x|$, 则 $f'(0)=$__________.

14. 曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 在其上一点 $(-1,0)$ 的法线方程为__________.

15. 曲线 $y=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ 的渐近线方程为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 确定 a,b 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases} \sin ax & x\leq 0 \\ \ln(1+x)+b & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

2. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. 设 $f''(x)$ 存在且 $f'(x)\neq 1, \forall x\in(-\infty,+\infty)$, 函数 $y=y(x)$ 由 $y=f(x+y)$ 确定. 求 y' 与 y''.

4. 求 $f(x)=|x^3-2x^2+x|$ 的所有最大单增区间、上凸下凸区间、极大极小值点, 并画出 $y=f(x)$ 的图像示意图.

【下一页还有试题……】

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 证明: 当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$.

2. (*7* 分) 设 $f(x)\in \mathcal{C}^{(1)}(-\infty,+\infty)$ 为下凸函数.

(1) 证明: $\forall x_0, x\in(-\infty,+\infty): f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

(2) 证明: 若存在常数 $M>0$, 使得 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 均有 $|f(x)|\le M$, 则 $f(x)$ 为常值函数.

答案与提示

(说明*:* 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{1}{\mathrm{e}}$ **2.** $\frac{1}{2}$ (提示*: Taylor* 展开.) **3.** $\frac{1}{3}$ (提示*:* 注意 $x\to+\infty$, 只能用 *L'Hospital* 法则.) **4.** $\frac{4}{3}$

5. 1 (提示*:* 通分后 *Taylor* 展开.) **6.** 第一类间断点 **7.** $x^x(1+\ln x)\mathrm{d}x$ **8.** $2x\cos(x^2+1)\mathrm{e}^{\sin(x^2+1)}$

9. 0 **10.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}}$ **11.** $(x+n)\mathrm{e}^x$ **12.** 13 **13.** 0 **14.** $y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$ **15.** $y=x+\dfrac{1}{3}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 由连续性知 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=b\Rightarrow b=0$. (*3* 分) 据导数定义有 $f'_-(0)=a, f'_+(0)=1\Rightarrow a=1$ (*6* 分). 故 $a=1, b=0$ (*1* 分).

2. 取对数得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln x}\ \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=}\ \lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$(*4* 分) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{1+x^2}}{\arctan x-\frac{\pi}{2}}\ \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)\cdot\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=-1$ (*4* 分), 故原极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (*2* 分)

3. $y'=\dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$ (*4* 分), $y''=\dfrac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$ (*6* 分).

4. 讨论 $g(x):=x^3-2x^2+x$ 的一阶与二阶导数, 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{1}{3},1)$ 上单调递减, 而在 $(0,\frac{1}{3})$ 及 $(1,+\infty)$ 上单调递增 (*2* 分); 在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 下凸, 而在 $(0,\frac{2}{3})$ 上凸 (*2* 分). 进而, 函数有极大值点 $x=\dfrac{1}{3}$, 有极小值点 $x=0$ 和 $x=1$ (*2* 分). 函数草图略. (*4* 分, 酌情给分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $\varphi(x):=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$, 则 $\varphi'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0, \forall x>0$. (*3* 分) 而 $\varphi(1)=0$, 故 $\varphi(x)\begin{cases}<0 & x\in(0,1)\\ >0 & x\in(1,+\infty)\end{cases}$. (*4* 分) 移项知 $x>0$ 时原不等式恒成立. (*1* 分)

2. (1) 若 $x>x_0$, 则 $\exists\xi\in(x_0,x):\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)\ge f'(x_0)$ (由下凸性知 $f'(x)$ 单调递增), 移项即得待证式. $x<x_0$ 的情形同理可证. (*4* 分) (2) 用反证法, 假设 $\exists x_1<x_2: f(x_1)\ne f(x_2)$, 可不妨设 $f(x_1)<f(x_2)$, 则 $k:=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi\in(x_1,x_2)Lf'(\xi)=k$, 从而 $f'(x)>k, \forall x>\xi$. 由 (1) 得: $f(x)>f(\xi)+k(x-\xi), \forall x>\xi$, 这与 $f(x)$ 的有界性矛盾. 故假设不成立, 命题得证. (*3* 分)

清华大学 2011 级微积分 A(1) 期中考试试题

2011.11.12

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{2}$, 则上极限 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n =$__________.

2. 设 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $\inf A =$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}} =$__________.

4. 设 a, b 均为正数, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}} + 2b^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n =$__________.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x =$__________.

6. 设 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, 则极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n =$__________.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$__________.

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处间断点的类型为__________.

9. 在 $x \to 0$ 时, 无穷小 $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$ 的阶为__________.

10. 函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases}$ 给出, 其微分 $\mathrm{d}y =$__________.

11. 设 f 可导, 函数 $y = f(\sin x)$ 存在可导的反函数, 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} =$__________.

12. 曲线 $y = x\arctan x$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线为__________.

13. 参数曲线 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t + \sin t \\ y = 4t + \cos t \end{cases}$ 在 xOy 平面上点 $(1,1)$ 处 (即 $t = 0$ 处) 的切线方程为__________.

14. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$, 则 $f'(0) =$__________.

15. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $f'(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内有__________ 个零点.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设二阶可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x+y) = x - y$ 确定, 求二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 上的单调区间, 极值和极值点, 凸性区间, 以及渐近线 (如果存在的话), 并画出草图.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = b$. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

【下一页还有试题……】

4. 用极限的 "$\varepsilon-\delta$" 定义直接验证 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{3}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 设 $0<x<1$, 证明不等式 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

2. (*7* 分) 设 $f(x)$ 于闭区间 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 且 $f(x)$ 不恒等于 x. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

答案与提示

(说明*:* 以下为官方提供的参考答案*.* 受篇幅所限*,* 计算题和证明题仅给出解答概要或思路*.*)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{1}{2}$ **2.** -1 **3.** e^2 (提示*:* 取对数用 *L'Hospital* 法则*.*) **4.** $\sqrt[3]{ab^2}$ (提示*:* 幂平均结论*,* 取对数用等价无穷小*.*) **5.** 1 (提示*:* 作代换 $t:=\dfrac{1}{x}\to 0^+$*.*) **6.** 1 (提示*:* 放缩法*.*) **7.** $-\dfrac{1}{2}$ **8.** 第一类 (跳跃) 间断点 **9.** 1 (提示*:* *Taylor* 展开*.*) **10.** $\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}x$ **11.** $\dfrac{1}{f'(\sin x)\cos x}$ **12.** $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ **13.** $y=2x-1$ **14.** $100!$ **15.** 2

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $y'=\dfrac{1-\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}$, $y''=\dfrac{\sin(x+y)(1+y')^2}{1+\cos(x+y)}$.

2. 求导得 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$. 因此, 函数在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增, 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减, 从而有极大值点 $x=\mathrm{e}$ (对应极大值 $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$). 函数在 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$ 上凸, 在 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 下凸, 从而有拐点 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$. 函数有两条渐近线 $x=0$ 和 $y=0$. 函数草图略.

3. 由题意, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}=b$. 记 $S_n:=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\dfrac{a+b}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+1}S_{2n}+\dfrac{a_{2n+1}}{2n+1}\right)=\dfrac{a+b}{2}$. 故原极限值为 $\dfrac{a+b}{2}$.

4. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{6}\varepsilon\right\},\forall x\in(2-\delta,2+\delta)\subset\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right):\left|\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{|x+2||x-2|}{3|x^2-1|}<\dfrac{(\frac{5}{2}+2)|x-2|}{3(\frac{9}{4}-1)}=\dfrac{6}{5}|x-2|<\varepsilon$. 此即为极限定义.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $F(x):=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$, 求导得 $F'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$, $F''(x)=\dfrac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0$, $\forall x\in(0,1)$. 而 $F(0)=F'(0)=0$, 故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, $F(x)<F(0)=0,\forall 0<x<1$.

2. 用反证法, 假设 $f'(x)\le 1,\forall x\in(0,1)$, 则 $F(x):=f(x)-x$ 在 $[0,1]$ 上单调递减 (由 $F'(x)\le 0$). 因此 $0=F(0)\ge F(x)\ge F(1)=0,\forall x\in(0,1)$, 即 $f(x)\equiv x$, 与题设矛盾. 故假设不成立, 命题得证. (本题也有利用微分中值定理的构造性证明.)

清华大学 2012 级微积分 A(1) 期中考试试题

2012.11.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}=$__________.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)=$__________.

4. 函数 $f(x)=x^2|x|$ 在 $x=0$ 处存在最高阶导数的阶数为__________.

5. 曲线 $y=\mathrm{e}^x+x^2+1$ 在其上一点 $(0,2)$ 处的切线方程为__________.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t\\ y=\mathrm{e}^t\sin t\end{cases}$ 确定, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

7. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, 则 $f^{(10)}(x)=$__________.

8. 设 $y=x+\mathrm{e}^x$, 则其反函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$__________.

9. 设 $x\to 0$ 时 $1-\cos x$ 与 $1-(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}$ 是同阶无穷小量, 则 $a=$__________.

10. 设函数 f,g 均可微, $y=f(x^2)g(x^3)$, 则 $\mathrm{d}y=$__________.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{1-x}}$ 在 $x=1$ 处间断点的类型为__________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$__________.

13. $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^2(\sqrt{n^2+n}\pi)=$__________.

14. 曲线 $y=\dfrac{x^3+3x+4}{x^2+1}$ 的斜渐近线为__________.

15. 函数 $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-2x$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最小值为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+a^2) & x>1\\ \sin b(x-1) & x\le 1\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 求 a,b 的值.

2. 求函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ 的单调区间和凸性区间, 并写出其极值点和拐点.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2)-\ln(1+x^2)}$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln t+t\\ y=\dfrac{t^2}{2}+t\end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【下一页还有试题……】

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $0 \le x_1 \le \sqrt{c}$, $x_{n+1} = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (其中 $c>1$ 为常数). 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其收敛值.

2. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导.
(1) 若 $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 求证: 存在 $\xi \in (0,+\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$.
(2) 若 $0 \le f(x) \le \ln \dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, 求证: 存在 $\xi \in (0,+\infty)$, 使 $f'(\xi) = \dfrac{2}{2\xi+1} - \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 2 **2.** $\dfrac{A}{2}$ (提示: Stolz 定理.) **3.** 1 **4.** 2 阶 **5.** $y = x+2$ **6.** $\dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$ **7.** $\dfrac{10!}{(1-x)^{11}}$ **8.** $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ **9.** $-\dfrac{3}{2}$ **10.** $[2xf'(x^2)\cdot g(x^3) + f(x^2)\cdot 3x^2 g'(x^3)]\mathrm{d}x$ **11.** 第二类间断点 (提示: 左右极限震荡型不存在.) **12.** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ **13.** 1 **14.** $y = x$ **15.** $3\sqrt[3]{4} - 4$ (提示: 检验极值可疑点.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 由 $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(a+1) = f(1) = 0$ 得 $a=0$, 进而由 $b = f'_-(1) = f'_+(1) = 2$ 得 $b=2$.

2. $y' = \dfrac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$, $y'' = \dfrac{2x(9-x^2)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}$. 故函数在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 及 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\sqrt{3},-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\sqrt{3})$ 上单调递减, 有极值点 $\pm\sqrt{3}$; 函数在区间 $(-\infty,-3),(-1,0),(1,3)$ 下凸, 在区间 $(-3,-1),(0,1),(3,+\infty)$ 上凸, 有拐点 $\pm\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 和 $(0,0)$.

3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2) - \ln(1+x^2)} \xlongequal{\text{Taylor}} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{72}) + (1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72}) + o(x^4)}{x^2 - (x^2 - \frac{x^4}{2}) + o(x^4)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-\frac{x^4}{36}+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = -\dfrac{1}{18}$.

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{t}{1+t}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{c - x_n^2}{c+x_n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, 故用归纳法可证 $0 \le x_{n+1} \le x_n \le \sqrt{c}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$, 从而 $\{x_n\}$ 单调有界, 必有极限 A. 递推式两端取极限并化简得 $A^2 = c$, 由保号性知数列的极限值为 $A = \sqrt{c}$.

2. (1) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一根 x_0, 则对区间 $(0,x_0)$ 用 Rolle 定理即可. 否则, 由连续性知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不变号, 不妨设为恒正. 则 $\exists M>0, \forall x>M: f(x) < f(1)$; 特别地, $0 < f(2M) < f(1)$. 又由 $f(x)$ 的连续性, $\exists m \in (0,1): f(m) = f(2M)$, 从而对区间 $(m,2M)$ 用 Rolle 定理即可. (2) 记 $g(x) := f(x) - \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, 则不难验证 $g(0)=0$. 而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$, 再由夹逼定理即得 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 因此, 由 (1) 的结论知 $\exists\xi\in(0,+\infty): g'(\xi) = 0$. 移项整理即得待证不等式.

清华大学 2013 级微积分 A(1) 期中考试试题

2013.11.17

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 当 $x \to 0$ 时, $3x - 4\sin x + \sin x\cos x$ 与 x^p 为同阶无穷小, 则 $p =$__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x^2)} =$__________.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(3^{\frac{1}{n-1}} - 3^{\frac{1}{n}}\right) =$__________.

4. 由方程 $x^2 + y^2 + \sin x + \sin y = 1$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$__________.

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x + \mathrm{e}^{2ax} - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 则 $a =$__________.

6. 函数 $y = \sin x + \mathrm{e}^x$ 的反函数微分 $\mathrm{d}x =$__________.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2}{(x-2)(x+3)}\right]^x =$__________.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) =$__________.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\dfrac{1}{x} & x < 0 \\ \ln(1+x^2) & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$__________.

10. 曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = t\sin t - \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 L 在参数 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为_____.

11. 设 a, b 均为大于 0 的常数, $f(x) = a^{x^b}$, 则 $f'(x) =$__________.

12. 曲线 $y = (2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为__________.

13. 设 $(1,3)$ 为 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $b - a =$__________.

14. 函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^n} (x \geq 0)$ 的间断点类型为__________.

15. 使不等式 $\ln(1+x) < \alpha + 2\sqrt{1+x}$ 对任意的 $x > 0$ 都成立的 α 的最小值为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求由参数形式 $\begin{cases} x = \cos t + t \\ y = \sin t + t \end{cases}$ 给出的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求函数 $f(x) = \sin(x^2 + 2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0 = -\sqrt{\pi}$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式 (求出一般项), 并求 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$.

3. 设 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$, 求 $f(x)$ 的定义域、单调区间、极值点、凸性区间、拐点及渐近线, 并画出 $y = f(x)$ 的示意图.

【下一页还有试题……】

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 二阶连续可微, $g(0)=1$, $g'(0)=-1$.

(1) a 为何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续?

(2) 当 $f(x)$ 为连续函数时, $f(x)$ 是否可导? 若可导, 求 $f'(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上三阶可导, 且在 $[a,b]$ 上 $|f'''(x)|\leq M$, $f(a+h)=f(a)+f'\left(a+\dfrac{h}{2}\right)h+E(h)$ $(0<h<b-a)$, 其中 $E(h)$ 为误差项. 求证: $|E(h)|\leq\dfrac{7}{24}Mh^3$.

2. (*7* 分) 设 $x_0>0$, $x_n=\ln(1+x_{n-1})$ $(n=2,3,4,\cdots)$. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在, 并求其值;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=2$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 5 **2.** 0 (提示: 分子有理化.) **3.** $\ln 3$ **4.** $-\dfrac{2x+\cos x}{2y+\cos y}$ **5.** -2 **6.** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\cos x+\mathrm{e}^x}$ **7.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (提示: 取对数.) **8.** $\dfrac{1}{3}$ (提示: 通分后 Taylor 展开.) **9.** 0 **10.** $y=2x-2-\dfrac{\pi}{2}$ **11.** $b\ln a\cdot x^{b-1}a^{x^b}$
12. $y=2x+1$ **13.** 6 **14.** 第一类间断点 **15.** -2

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+\cos t}{1-\sin t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1+\cos t-\sin t}{(1-\sin t)^3}$.

2. $f(x)=-\sin(x+\sqrt{\pi})^2=-(x+\sqrt{\pi})^2+\dfrac{1}{3!}(x+\sqrt{\pi})^6+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4n+2}+o\big((x+\sqrt{\pi})^{4n+2}\big)$.

从而有 $f^n(-\sqrt{\pi})=\begin{cases}(-1)^{k-1}\cdot\frac{(4k+2)!}{(2k+1)!} & n=4k+2\\ 0 & n\neq 4k+2\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$.

3. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. 求导得 $f'(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)^3}}$, 故函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,\frac{3}{2})$ 内递减, 在 $(\frac{3}{2},+\infty)$ 内递增, 从而有极小值点 $x=\dfrac{3}{2}$; $f''(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)^3}}\cdot\dfrac{1}{x(x-1)}>0$, 故函数在定义域内均下凸. 函数有渐近线 $y=x-\dfrac{1}{2}$, $y=-x+\dfrac{1}{2}$ 和 $x=1$. 函数草图略.

4. (1) 在 $x=0$ 处, $g(x)=1-x+o(x)\Rightarrow f(x)=o(1), x\to 0$, 因此必然有 $a=0$. (2) 由定义得 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{g'(x)-g(0)}{x}+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\right]=\dfrac{g''(0)-1}{2}$. 而 $x\neq 0$ 时显然有 $f'(x)=\dfrac{x[f'(x)+\mathrm{e}^{-x}]-[g(x)-\mathrm{e}^{-x}]}{x^2}$, 故函数可微.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 在 $x=a$ 处对 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 作 Taylor 展开: $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\dfrac{f'''(a+\theta_1 h)}{6}h^3$ $(\exists\theta_1\in(0,1))$, $f'\left(a+\dfrac{h}{2}\right)=f'(a)+\dfrac{f''(a)}{2}\dfrac{h}{2}+\dfrac{f'''(a+\theta_2 h)}{2}\left(\dfrac{h}{2}\right)^2$ $(\exists\theta_2\in(0,1))$, 相减得

$$|E(h)|=\left|f(a)+f'\left(a+\frac{h}{2}\right)h-f(a+h)\right|=\left|\left[\frac{f'''(a+\theta_2 h)}{8}-\frac{f'''(a+\theta_1 h)}{6}\right]h^3\right|\leq\frac{7}{24}Mh^3.$$

2. (1) 易见 $0<x_n=\ln(1+x_{n-1})<x_{n-1}$, 故 $\{x_n\}$ 单调有界, 必有极限. 两边取极限知极限值为 0. (2) 由 Stolz 定理: $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n\overset{\text{Stolz}}{=\!=\!=}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}\overset{x:=x_n\to 0}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}\overset{\text{Taylor}}{=\!=\!=}2$.

清华大学 2015 级微积分 A(1) 期中考试试题

2015.11.15

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$__________.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=$__________.

4. 当 $x\to0$ 时, 函数 $1-\cos\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)$ 与 x^n 为同阶无穷小, 则 $n=$__________.

5. 如果 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=3$, 则 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}}{x-2}=$__________.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}2ax+b & x\le0\\ \mathrm{e}^{ax}+2bx & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点可导, 则 $a+b=$__________.

7. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=$__________.

8. 设 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, 则 $f'(x)=$__________.

9. 设 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, 则 $f'(x)=$__________.

10. 设 f 为可微函数, $y=f(\mathrm{e}^x)+f(\ln x)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

11. 由参数方程 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^\theta\cos\theta\\ y=\mathrm{e}^\theta\sin\theta\end{cases}$ 表示的曲线 $y=y(x)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程为__________.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2+\ln y=x^4$ 确定, 则 $\mathrm{d}y=$__________.

13. 设 $y=x\sin x$, $x=x(y)$ 为其反函数, 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$__________.

14. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为__________.

15. $f(x)=\ln(x-1)$ 在 $x_0=2$ 点的三阶 Taylor 多项式为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 已知 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和凹凸区间;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数, 且 $f(0)=0$. 令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\ne0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$.

(1) 求 $g'(x)$;

(2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 点处的连续性.

【下一页还有试题……】

3. 在曲线 $y=x^2$ 上求一个点 (x_0,y_0), 其中 $x_0\in[0,8]$, 使过此点的切线与直线 $x=8$, $y=0$ 所围成的位于第 I 象限的三角形面积最大.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由参数形式 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t\\ y=t-\ln t\end{cases}$ 给出, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*10* 分) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\ (A\in\mathbb{R})$, 用 "$\varepsilon-\delta$" 语言证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^A$.

2. (*5* 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1)$. 试证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac12$ (提示: *Taylor* 展开.) **2.** 1 (提示: $\arctan n\to\dfrac{\pi}{2}$.) **3.** e^2 (提示: 取对数用 *L'Hospital* 法则.) **4.** 4 **5.** 3e **6.** 3 **7.** $\dfrac12$ (提示: 作代换 $t:=x-1\to0$.) **8.** $\left(1+\dfrac1x\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac1x\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]$ **9.** $\dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ **10.** $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x+\dfrac{f'(\ln x)}{x}$ **11.** $y=-x+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$ **12.** $\dfrac{4x^3y}{2y^2+1}\mathrm{d}x$ **13.** $\dfrac{1}{\sin x+x\cos x}$ **14.** 2 **15.** $(x-2)-\dfrac12(x-2)^2+\dfrac13(x-2)^3$ (提示: 区分 *Taylor* 多项式与 *Taylor* 展开式.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 函数定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (1) $f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}}\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2}$, $f''(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}}\dfrac{5x+1}{4x^4}$. 因此函数在 $(-\infty,-\frac12)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac12,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减; 函数在区间 $(-\infty,-\frac15)$ 上凸, 在区间 $(-\frac15,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 下凸. (2) $f(x)=\left[1+\dfrac{1}{2x}+o\left(\dfrac1x\right)\right](x+1)=x+\dfrac32+o(1),x\to\infty$. 故函数有斜渐近线 $y=x+\dfrac32$ 和竖直渐近线 $x=0$.

2. (1) 作 Taylor 展开得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2$ $(\xi\in(0,x))$. 因此 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(\xi)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}$ (也可用 L'Hospital 法则). (2) $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ $(x\neq0)$, 易见 $\lim\limits_{x\to0}g'(x)\xlongequal{\text{L'Hospital}}\dfrac{f''(0)}{2}=g'(0)$, 故 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 过 (x_0,x_0^2) 的切线 $y=2x_0x-x_0^2$ 与直线 $y=0$ 交于 $\left(\dfrac{x_0}{2},0\right)$, 与直线 $x=8$ 交于 $(8,16x_0-x_0^2)$. 故三角形面积 $S=S(x)=\dfrac{x(16-x)^2}{4}$ $(x\in(0,8))$. 求导得 $S'(x)=\dfrac{(x-16)(3x-16)}{4}$, 故函数在定义域内有极大值点 $\dfrac{16}{3}$, 不难验证此为最大值点. 故 $S_{\max}=S\left(\dfrac{16}{3}\right)=\dfrac{4096}{27}$.

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t-1}{t(1+\mathrm{e}^t)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{e}^t(-t^2+t+1)+1}{t^2(1+\mathrm{e}^t)^3}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta):|f(x)-A|<\min\left\{\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{e}^A}\right),\left|\ln\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{e}^A}\right)\right|\right\}$, 从而 $A+\ln\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{e}^A}\right)<f(x)<A+\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{e}^A}\right)$, 即 $-\varepsilon<\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^A<\varepsilon$. 由极限定义即得证.

2. (说明: 本题似乎有误, 因为显然有 $\xi=\dfrac12$ 满足题意. 下给出 "利用" 中值定理的方法.) 记 $g(x):=f(x)f(1-x)$, 则 $g(0)=g(1)$ 满足 Rolle 定理条件, 从而 $\exists\xi\in(0,1):g'(\xi)=f'(\xi)g(1-\xi)-f(\xi)g'(1-\xi)=0$. 移项整理即得.

清华大学 2016 级微积分 A(1) 期中考试试题

2016.11.13

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=$__________.

2. 若过原点的曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\mathrm{e}^{2x}-1$ 有相同的切线, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} nf\left(\dfrac{4}{n}\right)=$__________.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ 确定, 则 $\mathrm{d}y=$__________.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2xt}$, 则 $f'(x)=$__________.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=$__________.

6. 当 $x\to 0$ 时, 函数 $\tan(x^2)-\sin(x^2)$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$__________.

7. 常数 a 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-ax\right)=0$, 则 $a=$__________.

8. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+\ln y=1$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 由在其上的点 $(1,1)$ 处的切线方程为__________.

9. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, 则 $f^{(10)}(0)=$__________.

10. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点 $x=0$ 的类型为__________.

11. 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 可导. 记 $\varphi'(a)=A$, 则 $f'(0)=$__________.

12. 设 $y=\mathrm{e}^x+\arctan x$, 则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$__________.

13. 设 $f(x)=\arcsin\sqrt{x-1}$, 则 $f'(x)=$__________.

14. 函数 $f(x)=x\,|\sin x|$ 在 $\left(-\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内的不可导点的个数为__________.

15. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t+t^2 \\ y=\mathrm{e}^t\sin t\end{cases}$ 确定, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{t}{\sin x-\sin t}} & x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z} \\ 0 & x=n\pi, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$. 求函数 $f(x)$ 的显示表达式, 并求 $f(x)$ 的间断点 (指出间断点的类型).

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}} & x>0 \\ \dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{\sin x}-1) & x\leq 0\end{cases}$. 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的连续性和可微性; 若可微, 讨论其

【下一页还有试题……】

导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点处的连续性.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*10* 分) 设 $1<x_1<5$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(5-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限.

2. (*5* 分) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证: 对于任意正整数 n, 存在 n 个不同的 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f'(\xi_n)}=n$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $-\dfrac{1}{3}$ (提示: 通分后 Taylor 展开.) **2.** 8 (提示: 利用导数定义.) **3.** $\mathrm{d}y=-\dfrac{x(y^2+1)}{y(x^2+1)}\mathrm{d}x$ **4.** $\mathrm{e}^{2x}(1+2x)$

5. 1 (提示: 夹逼定理.) **6.** 3 **7.** -1 **8.** $y=\dfrac{3-x}{2}$ **9.** $-\dfrac{3\cdot 10!}{2^{11}}$ **10.** 第一类 (跳跃) 间断点

11. $2Ab$ **12.** $\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)\mathrm{e}^x+1}$ **13.** $\dfrac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ **14.** 2 个 **15.** $\dfrac{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)}{\mathrm{e}^t+2t}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 两边求导得 $\dfrac{\frac{y-xy'}{y^2}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}=\dfrac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2\sqrt{x^2+y^2}}$, 整理得 $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$. 进而有 $y''=\dfrac{2(xy'-y)}{(x+y)^2}=-\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x+y)^3}$.

2. 取对数得 $\lim\limits_{t\to x}\dfrac{t}{\sin x-\sin t}\cdot\ln\dfrac{\sin t}{\sin x}=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{t}{\sin x-\sin t}\cdot\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}=-\dfrac{x}{\sin x}$, 故 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sin x}} & x\neq n\pi\\ 0 & x=n\pi\end{cases}$.
在 $x=0$ 处, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 为第一类 (可去) 间断点; 在 $x=n\pi(n\neq 0)$ 两侧, $f(x)$ 分别趋近于 0 和 $+\infty$, 为第二类间断点. 因此函数有第一类 (可去) 间断点 0 和第二类间断点 $n\pi(n\neq 0)$

3. 函数在 $x=0$ 处显然左连续, 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x=0=f(0)$, 故函数在 $x=0$ 处连续. 注意到单侧导数 $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{h}}=\dfrac{\pi}{2}$, $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin h}-1}{h}=\dfrac{\pi}{2}$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$. 故导函数 $f'(x)=\begin{cases}-\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}+\arctan\frac{1}{\sqrt{x}} & x>0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\\ \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x & x<0\end{cases}$, 易验证在 $x=0$ 处也连续.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}\xlongequal{\text{分子有理化}}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}\xlongequal{\text{Taylor}}-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=-\dfrac{1}{2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\left|x_{n+1}-\dfrac{5}{2}\right|=\dfrac{(x_n-\frac{5}{2})^2}{\sqrt{x_n(5-x_n)}+\frac{5}{2}}<\dfrac{2|x_n-\frac{5}{2}|}{5}\left|x_n-\dfrac{5}{2}\right|$. 容易归纳证明 $x_n\in[1,x_1]$ (从而 $\dfrac{2|x_n-\frac{5}{2}|}{5}\leq\max\left\{\dfrac{3}{5},\dfrac{2|x_1-\frac{5}{2}|}{5}\right\}=:\lambda<1$), 则 $\left|x_{n+1}-\dfrac{5}{2}\right|\leq\lambda\left|x_n-\dfrac{5}{2}\right|$. 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛至 $\dfrac{5}{2}$.

2. 若 $y\equiv x$, 则任取 $(0,1)$ 中 n 个相异实数均可. 否则, $\exists\zeta\in(0,1):f(\zeta)\neq\zeta$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi\in(0,\zeta):f'(\xi)=\dfrac{f(\zeta)-f(0)}{\zeta-0}$; $\exists\eta\in(\zeta,1):f'(\eta)=\dfrac{f(\zeta)-f(1)}{\zeta-1}$. 注意到 $f'(\xi),f'(\eta)$ 中恰有一个大于 1, 另一个小于 1, 故由 Darboux 定理: $\exists\varepsilon>0,\forall d\in\left(\dfrac{1}{1-\varepsilon},\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right),\exists\delta\in(0,1):f'(\delta)=d$. 因此, 仅需取 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 使 $\dfrac{1}{f'(\xi_k)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{n-1}{2n}\varepsilon+\dfrac{k}{n}\varepsilon$, 则易验证满足题意. 命题得证.

清华大学 2018 级微积分 A(1) 期中考试试题

2018.11.17

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=$__________.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{4x-3}\sin\dfrac{1}{x+1}=$__________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\right)=$__________.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}=$__________.

5. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=$__________.

6. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{\mathrm{e}^x-1}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$__________.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=$__________.

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax} & x>0\\ 1 & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$__________.

9. 曲线 $y=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 的左侧以及右侧部分的切线方程分别为__________.

10. 设 $f(x)=x^{\sin x}$, 则 $f'(\pi)=$__________.

11. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}\sin(2x)$, 则 $\mathrm{d}y=$__________.

12. 函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x_0=0$ 处的带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为__________.

13. 设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$, 则 $f^{(10)}(x)=$__________.

14. 函数 $f(x)=x^6|x|$ 在 $x=0$ 处存在最高阶导数的阶数为__________.

15. 曲线 $y=y(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases}x=t\sin t\\ y=t\cos t\end{cases}$, 其中 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{(1-x)t}+x^{2t}}{\mathrm{e}^{(1-x)t}+x^{2t+1}}, x\in[0,+\infty)$. 求函数 $f(x)$ 的表达式, 讨论 $f(x)$ 的连续性和可微性, 并在可微点处计算其导函数.

2. 设 $y=2x+\sin x$, 求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

3. 曲线 $y=x^{-\lambda}, x>0$ ($\lambda>0$ 是参数) 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个三角形, 记切点横坐标为 a. 求切线方程和上述三角形的面积. 当 $a\to+\infty$ 时, 该三角形的面积变化趋势如何?

4. 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*10 分*) 设 $a_1=0$, 且对一切 $n\ge 1$ 均有 $a_{n+1}=\dfrac{1+2a_n}{1+a_n}$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 并求该极限.

2. (*5 分*) 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f(1)>0$, 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在 (为有限实数), 且严格小于 0. 求证: 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 1 (提示: 放缩法.) **2.** $\dfrac{1}{2}$ **3.** 3 **4.** $-\dfrac{2}{3}$ (提示: Taylor 展开.) **5.** e^2 (提示: 取对数后 Taylor 展开.) **6.** 1 **7.** $\sqrt{3}$ **8.** $\dfrac{1}{2}$ **9.** 左侧切线 $y=-x$, 右侧切线 $y=0$ **10.** $-\ln\pi$ (提示: 对数求导法.)

11. $[-3\mathrm{e}^{-3x}\sin(2x)+2\cos(2x)\mathrm{e}^{-3x}]\mathrm{d}x$ **12.** $f(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}2x^k+o(x^n)=1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+o(x^n)$

13. $(x^2+20x+90)\mathrm{e}^x$ **14.** 6 阶 **15.** $\dfrac{\cos t-t\sin t}{\sin t+t\cos t}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x\lambda^t+1}{\lambda^t+x}$, 其中 $\lambda:=\dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}$. 考察辅助函数 $g(x):=\mathrm{e}^{1-x}-x^2$ $(x\in[0,+\infty))$, $g'(x)=-\mathrm{e}^{1-x}-2x<0$, 故 $g(x)$ 单调递减. 又注意到 $g(1)=0$, 因此 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \lambda<1\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)\\ 1 & \lambda=1\Leftrightarrow x=1\\ x & \lambda>1\Leftrightarrow x\in[0,1)\end{cases}$. 显然 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上可导, 且导函数为 $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2} & x\in(1,+\infty)\\ 1 & x\in(0,1)\end{cases}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{2+\cos x}$, 从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^3}$.

3. $y'=-\lambda x^{-\lambda-1}$, 故切线斜率为 $k=-\lambda a^{-\lambda-1}$, 切线方程为 $y=-\lambda a^{-\lambda-1}x+a^{-\lambda}(1+\lambda)$. 从而切线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $x_0=\dfrac{1+\lambda}{\lambda}a$ 和 $y_0=a^{-\lambda}(1+\lambda)$, 则三角形面积 $S=S(a)=\dfrac{x_0y_0}{2}=\dfrac{(1+\lambda)^2}{2\lambda}a^{1-\lambda}$, 在 $a\to+\infty$ 时根据参数 λ 取值不同, 分别有渐进行为 $S(a)\to\begin{cases}+\infty & \lambda\in(0,1)\\ \frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda} & \lambda=1\\ 0 & \lambda\in(1,+\infty)\end{cases}$.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x^3}=\dfrac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{Taylor}}\dfrac{1}{6}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $\phi:=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 我们证明 $0\le a_n<a_{n+1}<\phi$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$. 事实上, 易归纳得 $a_n<\phi\Rightarrow a_{n+1}=2-\dfrac{1}{1+a_n}<2-\dfrac{1}{1+\phi}=\phi$, 进而 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1+a_n-a_n^2}{1+a_n}>0$. 因此 $\{a_n\}$ 单调有界, 必有极限 A. 在递推式两端取极限并化简整理得 $A^2-A-1=0$, 由保号性知 $A=\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. 设 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=A<0$, 显然 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. 由极限定义, $\exists\delta>0,\forall x\in(0,2\delta):|f(x)-A|<\dfrac{|A|}{2}$, 从而 $f(\delta)<-\dfrac{|A|}{2}<0$. 因此 $\exists\beta\in(\delta,1):f(\beta)=0$ (介值定理), 进而 $\exists\gamma\in(\delta,\beta):f'(\gamma)=\dfrac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}>0$ (Lagrange 中值定理). 而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=A<0$, 故 $\exists\alpha\in(0,\gamma):f'(\alpha)=0$ (Darboux 定理, 即导数的介值性质). 现在考虑辅助函数 $g(x):=f(x)f'(x)$, 则 $g(0)=g(\alpha)=g(\beta)=0$, 故由 Rolle 中值定理: $\exists\xi\in(0,\alpha),\eta\in(\alpha,\beta):g'(\xi)=g'(\eta)=0$. 这恰好是待证的结论.

清华大学 2006 级一元微积分期末考试试题

2007.1

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=$__________.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x)=\displaystyle\int_0^{\cos x}f(x-t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=$__________.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sin x^3+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=$__________.

4. $\displaystyle\int x\ln x\mathrm{d}x=$__________.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=$__________.

6. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$__________.

7. 当 p 的取值范围为__________ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x-2)^{p-1}}$ 收敛.

8. 设幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 收敛, 则 a 的取值范围为__________.

9. 若广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 则参数 p 的取值范围为__________.

10. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{2n+1}$ 的收敛半径是__________.

11. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 是收敛还是发散? __________(填 “绝对收敛”, “条件收敛” 或 “发散”).

12. 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0=-1$ 点的 Taylor 级数展开式为__________.

13. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n^{\frac{n}{2}}}$ 收敛还是发散? __________(填 “收敛” 或 “发散”).

14. 定解问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=1\\ y(0)=0\end{cases}$ 的解为__________.

15. 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=y^2$ 的所有解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

2. 计算上半心形线: $\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$ $(0\le\theta\le\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数, 求该幂级数的收敛域, 并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2(x+1)^n$ 的和函数.

【下一页还有试题……】

4. 求下面定解问题的解 $y=y(x), x\in(0,+\infty)$: $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2y(y-a)(2y-a)\\ y(0)=1, y'(0)=\sqrt{2}(1-a)\end{cases}$ (其中, 常数 $a>1$).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增, 求证: $\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. (*7* 分) 设 $f\in\mathcal{C}^{(1)}[0,+\infty)$, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(|f(x)|+|f'(x)|\big)\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{1}{2}$ (提示: *L'Hospital* 法则.) **2.** $f(x)-(1+\sin x)f(x-\cos x)$ **3.** $\dfrac{\pi}{2}$ (提示: 利用奇偶性与几何意义.)

4. $\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$ **5.** $\ln 2$ **6.** $\cos\dfrac{1}{x}+C$ **7.** $(1,2)$ **8.** $(1,3]$ **9.** $(1,2)$ **10.** $\sqrt{2}$

11. 条件收敛 **12.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n!}, x\in\mathbb{R}$ **13.** 收敛 (提示: 比值判别法.) **14.** $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2}$

15. $y=\dfrac{1}{C\mathrm{e}^{-x}-1}$ 及 $y=0$ (提示: 求所有解时不要遗漏奇解.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})$(*2* 分)$\displaystyle=2\int_0^1\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})$(*4* 分)$=\dfrac{\pi^2}{4}$(*4* 分).

2. $\mathrm{d}x=-a(1+2\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$ (*2* 分), 从而有 $\displaystyle V=\left|\int_0^\pi\pi y^2\mathrm{d}x\right|=\pi a^3\left|\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(1+2\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)\right|$ (表达式 *3* 分, 绝对值 *2* 分)$\displaystyle\overset{t:=\cos\theta}{=\!=\!=}\pi a^3\int_{-1}^1(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)\mathrm{d}t=\frac{8}{3}\pi a^3$(*3* 分).

3. 注意到 $-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-(x+1)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(x+1)^n, x\in(-2,0)$, 故求导得 $\dfrac{1}{x^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n(x+1)^{n-1}$ (*4* 分), 收敛域为 $(-2,0)$ (*2* 分). 进而有 $\dfrac{x+1}{x^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n(x+1)^n$, 再求导得 $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2(x+1)^{n-1}$, 因此所求和函数为 $S(x)=-\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^3}$. (*4* 分)

4. 令 $y'=p(y)$, 则 $y''=p'_yp$. 方程化为 $pp'_y=4y^3-6ay^2+2a^2y$ (*2* 分), 分离变量积分得 $p^2=2[y^2(y-a)^2+C]$ (*2* 分). 由初值条件解得 $C=0$, 故 $p(y)=\sqrt{2}y(y-a)$ (*1* 分). 再分离变量积分得 $\sqrt{2}x=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y(y-a)}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y-a}{y}\right|+C$ (*4* 分), 利用初值条件解得 $C=-\dfrac{\ln(a-1)}{a}$, 故 $y(x)=\dfrac{a}{1+(a-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}ax}}$ (*1* 分).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $F(b):=\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$, $G(b):=\dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 则 $F(a)=G(a)$ (*2* 分), $F'(b)=bf(b)$, $G'(b)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{a+b}{2}f(b)$ (*2* 分). 由单调性得 $F'(x)\ge G'(x)$ (*2* 分), 故不等式得证. (注: 移项分拆后利用积分中值定理同样可证, 酌情给分.)

2. 由比较判别法, $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 故极限 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}f(A)=f(0)+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f'(x)\mathrm{d}x=f(0)+\int_0^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 存在. (*3* 分) 若 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq0$, 不妨令 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=a>0$ (否则取反), 则 $\exists M>0,\forall x>M: f(x)\ge\dfrac{a}{2}$. 故 $\forall A>M: \displaystyle\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\ge\int_M^A|f(x)|\mathrm{d}x\ge\frac{a}{2}(A-M)\to+\infty$, 矛盾. 因此只能是 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. (*4* 分)

清华大学 2008 级一元微积分期末考试试题

2009.1.9

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 定积分 $\displaystyle\int_0^{100}(x-[x])\mathrm{d}x=$__________, 其中 $[x]$ 表示取整函数.

2. 极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$__________.

3. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=$__________.

4. 定积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x=$__________.

5. 若广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)\mathrm{d}x}{x^p(1+x)^{p-1}}$ 收敛, 则参数 p 的取值范围是__________.

6. 设 $p>0$, 则幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n-1}}{n^p}$ 的收敛域为__________.

7. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x-y}+1$ 的通解为__________.

8. 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\displaystyle\int f\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x=$__________.

9. 不定积分 $\displaystyle\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x=$__________.

10. 设 $a\neq 0$, 则 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(a+x^n)}=$__________.

11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可导, 则 $\displaystyle\lim_{a\to0}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=$__________.

12. 求和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(1+n)}{n!}=$__________.

13. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}f(t-x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(x)=$__________.

14. 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0=-1$ 点的幂级数展开式为__________.

15. 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________.

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求解二阶常微分方程的初值问题: $\begin{cases}y''-y'=\mathrm{e}^{2x}\\ y(0)=\dfrac{1}{2},y'(0)=1\end{cases}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $xf'(x)=f(x)+x^2$. 又设曲线 $y=f(x)$ 与 $x=0,x=1,y=0$ 所围的图形 S 面积为 2. 求 $f(x)$ 的表达式, 以及图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且当 $x\in[0,\pi)$ 时有 $f(x)=x$. 计算 $\displaystyle\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

【下一页还有试题……】

4. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

5. 设平面区域 D 由 $y=0, y=a, x=0, s=\sqrt{a^2+y^2}$ 围成 $(a>0)$. 求 D 绕 y 轴旋转所生成的旋转体的体积 V, 以及旋转体的表面积 S (表面积 = 侧面积 + 上下底面积).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*7* 分) 已知方程 $x^n+nx-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的根, 记作 a_n $(n=1,2,\cdots)$. 证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

2. (*8* 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 满足 $\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \forall x\in[a,b)$, 且 $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. 证明: $\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 50 **2.** $\ln 2$ **3.** $\arcsin(2x-1)+C$ (或写为 $2\arcsin\sqrt{x}+C$ 等) **4.** $\mathrm{e}-\dfrac{5}{\mathrm{e}}$ **5.** $(1,2)$ **6.** $[0,2]$ **7.** $(x-y)^2=-2x+C$ (提示: 作代换 $t:=x-y$.) **8.** $\dfrac{a^2}{x}\sin\dfrac{x}{a}+C$ **9.** $(1+x)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+C$ (提示: 作代换 $t:=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.) **10.** $\dfrac{1}{na}\ln\left|\dfrac{x^n}{a+x^n}\right|+C$ (提示: 作代换 $t:=x^n$.) **11.** $f'(0)$ (提示: *L'Hospital* 法则.) **12.** $3\mathrm{e}^2$ **13.** $(\cos x-1)f(\sin x-x)+f(-x)$ **14.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n!}, x\in\mathbb{R}$ **15.** $y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2$

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题)

1. 令 $z:=y'$, 则 $z'-z=\mathrm{e}^{2x}$, 解得 $z(x)=\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^x$. 由 $z(0)=1$ 知 $C_1=0$, 从而 $y'=\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_2$. 又由 $y(0)=\dfrac{1}{2}$ 知 $C_2=0$, 故 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

2. 在 $x\neq 0$ 处, $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1$, 结合连续性得 $f(x)=x^2+Cx(x\in[0,1])$, 故 $\displaystyle\int_0^1|x^2+Cx|\mathrm{d}x=2$. (i) $C\ge 0$ 时, 解得 $C=\dfrac{10}{3}$, 从而 $V=\dfrac{752}{135}\pi$. (ii) $-1<C<0$ 时, 均不合题意. (iii) $C\le -1$ 时, 解得 $C=-\dfrac{14}{3}$, 从而 $V=\dfrac{692}{135}\pi$. 综上, 共有两组合题意的解.

3. $\displaystyle\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x \xlongequal{t:=x-\pi} \int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]\mathrm{d}t \xlongequal{u:=t-\pi} \int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_0^\pi f(u)\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\pi^2-2}{2}=\pi^2-2.$

4. $S(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n-1}-\frac{x^n}{n+1}\right)=-\frac{x\ln(1-x)}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1-x)}{x}+1+\frac{x}{2}\right]$, $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\ln 2$.

5. $V=\pi\displaystyle\int_0^a(a^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi a^3$, $S=2\pi\displaystyle\int_0^a x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}y+\pi(2a^2+a^2)=\left[\frac{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}+3\right]\pi a^2$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到 $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)<0<f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 故 $\dfrac{1}{n+1}<a_n<\dfrac{1}{n}$, 从而 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法即得.

2. 令 $F(x):=f(x)-g(x)$, $G(x):=\displaystyle\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$. 易见 $G'(x)=F(x)$, 且 $G(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$. 从而 $\displaystyle\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}[G(x)]=xG(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x\le 0$, 移项即得待证不等式.

清华大学 2009 级一元微积分期末考试试题

2009.1

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x =$__________.

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} =$__________.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x =$__________.

4. $\displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x = \arctan x + C$, 则 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} =$__________.

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x =$__________.

6. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right) =$__________.

7. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(0)\neq 0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$. 当 $x\to 0$ 时, $F(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k=$__________.

8. 将 $(x-3)^2+y^2=1$ 绕 y 轴转一圈, 则所得图形围成的体积为__________.

9. 设 $m>0$, 且广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 收敛, 则 m 的取值范围为__________.

10. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n+(-5)^n}$ 的收敛域为__________.

11. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n^p}$ 条件收敛, 则参数 p 取值范围为__________.

12. 在 $x_0=0$ 点, 函数 $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的幂级数展开为__________.

13. 微分方程 $y'=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x+y}$ 的通解为__________.

14. 微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 满足 $y(1)=0$ 的解为__________.

15. 初值问题 $\begin{cases} y''+2x(y')^2=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$ 的解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求 p 的取值范围, 使得 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\frac{\pi}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 收敛.

2. 计算摆线: $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积和表面积.

【下一页还有试题……】

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)\in\mathcal{C}(0,+\infty)$, 且对任意 $x>0$ 满足 $x\displaystyle\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)+x^4$, $f(1)=0$. 求函数 $f(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 已知函数 $y=f(x)=x\ln x+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$. 求 $f(x)$ 的定义域, 证明 $y=f(x)$ 满足微分方程 $xy'-y=x\mathrm{e}^x$, 且 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}y(x)=0$.

2. (*7* 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0$, $0<f'(x)<1,\forall x\in[0,1]$.
求证: $\left[\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln|1-x|-\ln x+C$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt2}+C$ (提示: 提出 $\cos^2x$ 凑 $\tan x$ 的微分.) **3.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln2}{2}$

4. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+C$ **5.** $\dfrac{\pi}{2}$ (提示: 利用奇偶性.) **6.** $2x\mathrm{e}^{x^4}-\mathrm{e}^{x^2}$ **7.** 3 (提示: *L'Hospital* 法则.) **8.** $6\pi^2$

9. $(1,+\infty)$ **10.** $(-\sqrt5,\sqrt5)$ **11.** $(-1,0]$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)},x\in\mathbb{R}$ **13.** $y-\ln(\mathrm{e}^y+1)=\mathrm{e}^x+C$

14. $y=x-x^2$ **15.** $y=1$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 在瑕点 $x=1$ 附近, $\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln^p x}\sim\dfrac{\pi}{x(x-1)^{p-1}}$, 当且仅当 $p<2$ 时收敛. 在 $+\infty$ 附近, $\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln^p x}\sim\dfrac{\pi}{x\ln^p x}$, 而 $\displaystyle\int_2^A\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}\overset{t:=\ln x}{=\!=\!=}\int_{\ln2}^{\ln A}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}$, 故当且仅当 $p>1$ 时收敛. 综上, p 的取值范围是 $(1,2)$.

2. $V=\displaystyle\int_0^{2\pi}\pi(1-\cos t)^2\mathrm{d}(t-\sin t)=5\pi^2$, $S=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{64}{3}\pi$.

3. 记 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$, 则 $\displaystyle\int_0^x\frac{S(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n\Rightarrow\int_0^x\left[\frac1u\int_0^u\frac{S(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$. 故求导反解得 $S(x)=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, 从而原级数的和为 $S\left(-\dfrac12\right)=-\dfrac{2}{27}$.

4. 令 $u=tx$, 换元整理得 $3\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)+x^4$. 两边求导得一阶微分方程 $f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=-4x^2$, 解得 $f(x)=x^2(C-4x)$. 由 $f(1)=0$ 知 $C=4$, 故 $f(x)=4x^2-4x^3$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到级数收敛域为 $\mathbb{R}$, 而 $x\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$, 故 $f(x)$ 的定义域也为 $(0,+\infty)$. 求导后代入得 $xy'-y=x\left[1+\ln x+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+1)!}\right]-\left[x\ln x+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}\right]=x+x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=x\mathrm{e}^x$. 此外, 由级数的逐项求极限性质, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}y(x)=\lim_{x\to0^+}(x\ln x)+\lim_{x\to0^+}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}=0$.

2. 记 $\varphi(x):=\left[\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x[f(t)]^3\mathrm{d}t$, 则 $\varphi'(x)=f(x)\left[2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$. 又记 $\psi(x):=2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$, 则 $\psi'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$, $\forall x\in[0,1]$, 又 $\psi(0)=0$, 故 $\psi(x)>0\Rightarrow\varphi'(x)>0$, $\forall x\in[0,1]$. 再由 $\varphi(0)=0$ 就得到 $\varphi(1)>0$, 移项即得待证不等式.

清华大学 2010 级微积分 A(1) 期末考试试题

2011.1

(本卷后用作期末考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n+2i)}=$__________.

2. $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3}=$__________.

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{2x}\ln(1+\sin t)\mathrm{d}t=$__________.

5. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$, $y=-\cos(\pi x)$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$ 所围成区域的面积为__________.

6. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x=$__________.

7. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=$__________.

8. $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=$__________.

9. 悬链线 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(|x|\le 1)$ 的弧长 $L=$__________.

10. 二阶微分方程 $x^2y''-xy'-3y=0$ 的通解为__________.

11. 一阶线性常微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2z\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2y+z\end{cases}$ 的通解为__________.

12. 设 x, x^2 是二阶齐次线性常微分方程组的解, 则该微分方程为__________.

13. 微分方程 $y''+6y'+10y=0$ 的通解为__________.

14. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解为__________.

15. 常微分方程 $y'-\dfrac{6}{x}y=-xy^2$ 的通解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

2. 求曲线 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos t\\ y=-1+\sqrt{2}\sin t\end{cases}\left(t\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\right)$ 绕 x 轴旋转的旋转体体积及表面积.

3. 求微分方程 $y''+2y'+y=(3x+2)\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

【下一页还有试题……】

4. 求一条曲线 $\Gamma: y=y(x)$, 其中 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续可微, 并使得曲线 Γ 上的每一点处, 切线与横轴交点的坐标等于切点横坐标的一半.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 设 $f\in\mathcal{C}[0,1]$, 利用分部积分证明: $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)f(x)\mathrm{d}x.$

2. (*7* 分) 设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数. 考虑一阶线性常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x)$ 的解的情况.
(1) 举出 $a(x),b(x)$ 的一个例子, 使得方程的解为下列三种情况之一: (a) 没有以 2π 为周期的解; (b) 只有一个以 2π 为周期的解; (c) 任意解都以 2π 为周期.
(2) 证明该方程以 2π 为周期的解的个数, 只能出现上述三种情况之一.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\ln3-\ln2$ **2.** $x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C$ **3.** $\dfrac{1}{3}$ (提示: *L'Hospital* 法则.) **4.** $2\ln(1+\sin2x)-2x\ln(1+\sin x^2)$

5. $\sqrt{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+\dfrac{2}{\pi}$ **6.** $\dfrac{4}{3}$ **7.** $\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ **8.** $2\ln(\sqrt{2}+1)-2\ln2$ **9.** $\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

10. $y=C_1x^3+\dfrac{C_2}{x}$ (提示: *Euler* 方程.) **11.** $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-x}\\\mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{3x}\\\mathrm{e}^{3x}\end{pmatrix}$ **12.** $y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=0$

13. $y=C_1\mathrm{e}^{-3x}\cos x+C_2\mathrm{e}^{-3x}\sin x$ **14.** $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$ **15.** $\dfrac{1}{y}=\dfrac{C}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+3\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x(3+\tan^2x)}\xlongequal{t:=\tan x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$

2. $\displaystyle V=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\pi(-1+\sqrt{2}\sin t)^2\sqrt{2}(-\sin t)\mathrm{d}t=2\pi\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}\right),\ S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}2\pi(-1+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\pi\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$

3. 方程对应的齐次方程有二重特征根 $\lambda=-1$, 故齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$. 设非齐次方程有形如 $\widetilde{y}=x^2(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ 的特解, 代入解得 $a=2,b=1$. 故非齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+x^2(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

4. 曲线 Γ 上任意一点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$. 由题意, 点 $\left(\dfrac{x_0}{2},0\right)$ 在切线上, 故 $-y_0=-y'(x_0)\cdot\dfrac{x_0}{2}$. 因此, 函数 $y(x)$ 满足微分方程 $xy'=2y$, 解得 $y=Cx^2$ (C 为任意非零常数).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}\left[x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right]_0^1-\int_0^1x\mathrm{d}\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right]=\int_0^1xf(x^2)\mathrm{d}(x^2)+\int_0^1xf(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$
$\displaystyle\xlongequal{u:=x^2,v:=\sqrt{x}}\int_0^1\sqrt{u}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^1v^2f(v)\mathrm{d}v=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)f(x)\mathrm{d}x.$

2. (1) 方程通解可写为 $y=\mathrm{e}^{\int_0^xa(t)\mathrm{d}t}\left[\displaystyle\int_0^xb(u)\mathrm{e}^{-\int_0^ua(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u+C\right]$. 因此: (a) 取 $a(x)=b(x)=\cos x+1$, 则 $y=C\mathrm{e}^{\sin x+x}-1$ 均不以 2π 为周期; (b) 取 $a(x)=\cos x+1$, 方程 $\left[1-\mathrm{e}^{\int_0^{2\pi}a(t)\mathrm{d}t}\right]y_0=\mathrm{e}^{\int_0^{2\pi}a(t)\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^{2\pi}b(u)\mathrm{e}^{-\int_0^ua(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$ 确定初值 y_0, 则取 $C=y_0$ 即得唯一的 2π 周期解; (c) 取 $a(x)=b(x)=\cos x$, 则 $y=C\mathrm{e}^{\sin x}-1$ 均以 2π 为周期.
(2) 若 (a)、(b) 均不成立, 则方程至少有两个 2π 周期解 y_1,y_2, 从而此一阶方程的通解可写为 $y=C(y_1-y_2)+y_1$, 恒以 2π 为周期. 这就证明了 (a)(b)(c) 三者必居其一 (且仅居其一).

清华大学 2013 级微积分 A(1) 期末考试试题

2014.1.8

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}=$__________.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数, $g(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$, 则 $g'(x)=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin x}=$__________.

4. 设 $f(x)=|x|$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为__________.

5. $\int_{-1}^{1}\sin(x^3)\cos x\mathrm{d}x=$__________.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一个原函数为 x^4+2x^2, 则 $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=$__________.

7. 曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为__________.

8. 渐开线: $\begin{cases}x(t)=\cos t+t\sin t\\ y(t)=\sin t-t\cos t\end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$ 的弧长为__________.

9. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$__________.

10. 设广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛, 则参数 p 的取值范围为__________.

11. 微分方程 $(x^2+1)(y^2+1)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$ 满足 $y(0)=0$ 的解为__________.

12. 微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为__________.

13. 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的通解为__________.

14. 设 $\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x},\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x},-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶非齐次线性常微分方程的解, 则该微分方程的通解为__________.

15. 常微分方程组 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\end{cases}$ 的通解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求常微分方程 $y''-2y'-3y=-3x-5$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=5$ 的解.

2. 求积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

3. 设 $F(x)>0$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续可导函数, $F(0)=\sqrt{\pi}$, 且 $F(x)F'(x)=\frac{\cos x}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$. 求 $F(x)$.

【下一页还有试题……】

4. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\cos t \\ y = \mathrm{e}^t\sin t \end{cases}$ $\left(t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 确定的曲线绕 x 轴旋转所成曲面的面积.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 证明: $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 1-\sin 1.$

2. (8 分) 设当 $x>-1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+f(x) = \dfrac{1}{x+1}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 求证:

(1) $f(x)$ 满足微分方程 $(x+1)y''+(x+2)y'=0$;

(2) 若 $f(0)=1$, $f'(0)=-1$, 则 $\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le 1, \forall x\ge 0$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{1}{3}$ **2.** $f(x)$ (提示: 作代换 $u:=x-t$, 或直接用含参积分求导的结论.) **3.** $-\dfrac{1}{3}$ (提示: L'Hospital 法则.)

4. $F(x) = \begin{cases} \frac12 x^2 + C & x\ge 0 \\ -\frac12 x^2 + C & x<0 \end{cases}$ (提示: 选取常数使之连续.) **5.** 0 (提示: 利用对称性.) **6.** 6 **7.** $\dfrac{\pi^2}{2}$

8. $2\pi^2$ **9.** $\dfrac{\pi}{2}$ (提示: 作代换 $x:=\sec t$, 其中 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.) **10.** $\left(\dfrac12,+\infty\right)$ **11.** $y^2=\mathrm{e}^{-\frac13 x^3-x}-1$ **12.** $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$ **13.** $\mathrm{e}^{-x}(\sin x+C)$ **14.** $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$ **15.** $\begin{cases} x = [(C_2-C_1)-C_2t]\mathrm{e}^{-t} \\ y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 对应齐次方程有通解 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$. 下求非齐次方程的一个特解, 猜测其具有形式 $\widetilde{y}=ax+b$, 代入原方程解得 $a=b=1$, 故非齐次方程有通解 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+x+1$. 代入定解条件得 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 3C_1-C_2=4 \end{cases}$, 解得 $C_1=1$, $C_2=-1$. 因此, 所求的特解为 $y=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}+x+1$.

2. 注意到 $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{x-1}{2(x^2+1))}$, 故 $\displaystyle\int^1_0\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac12\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac14\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2+1}+\frac12\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac12\ln|x+1|-\frac14\ln(x^2+1)+\frac12\arctan x + C$.

3. 分离变量得 $F(x)\mathrm{d}\big(F(x)\big) = \dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{1+\sin^2 x}$, 故 $F(x)^2 = 2\arctan(\sin x)+C$. 代入定解条件得 $C=\pi$, 又 $F(x)>0$, 故 $F(x)=\sqrt{2\arctan(\sin x)+\pi}$.

4. $S = 2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}|\mathrm{e}^t\sin t|\sqrt{[\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)]^2+[\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)]^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2t}\sin t\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt2}{5}\pi(1+2\mathrm{e}^{\pi})$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部}} \left[x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right]_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}\left[\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right] = -\int_0^1 x\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$ $\displaystyle = \int_0^1\left(\sin x-\frac{\sin\sqrt{x}}{2}\right)\mathrm{d}x \xlongequal{t:=\sqrt{x}} -\int_0^1 t\sin t\mathrm{d}t+\int_0^1\sin x\mathrm{d}x = 1-\sin 1$.

2. (1) 等式两端求导得 $f''(x)+f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(x)}{x+1} = -\frac{f'(x)+f(x)}{x+1}+\frac{f(x)}{x+1}$, 移项整理即得 $(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$. (2) 记 $u:=f'(x)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u} = -\dfrac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x$, 解得 $\ln|u| = -\ln|x+1|-x+C$. 在题给条件下, 有 $C=0$ 且 $u<0$, 故解得 $f'(x)=u=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x(x+1)}$. 进而有 $f(x)=1-\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t(t+1)}\ge 1-\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}$, 而右侧不等式根据保号性显然. 故不等式得证.

清华大学 2016 级微积分 A(1) 期末考试试题

2017.1.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x| & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的极大值点是 $x=$__________.

2. 函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ 在区间 $[-5,1]$ 上的最小值为__________.

3. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有__________ 条渐近线.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ 在 $x_0=2$ 处的 $2n$ 阶 Taylor 多项式为__________.

5. 若 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+C$, 则 $\displaystyle\int[f'(x)-2f(x)]\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$__________.

6. $\displaystyle\int\frac{8\mathrm{d}x}{x(x^2+4)}=$__________.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)=$__________.

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{\pi^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$__________.

9. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{x-\sin x}(1-\cos(t^2))\mathrm{d}t$, 若 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}=C\neq 0$, 则 $k=$__________.

10. 曲线 $y=\displaystyle\int_0^x\tan t\mathrm{d}t\ (0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 的弧长为__________.

11. 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为__________.

12. 曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为__________.

13. 设 $p>0$, 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{2p})[\ln(1+x)]^p}$ 收敛, 则实数 p 的取值范围是__________.

14. 微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x$ 满足 $y(0)=1,\ y'(0)=1$ 的特解为__________.

15. 微分方程 $x^2y''-xy'+y=0\ (x>0)$ 的满足 $y(1)=1, y'(1)=0$ 的特解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的定义域、单调区间、凸性区间、极值、拐点和渐近线.

2. 求广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

3. 设 $a>0$, 求旋轮线: $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面的面积.

4. 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)}-y''=0$, 且当 $x\to 0$ 时 $y(x)\sim x^3$. 求 $y(x)$.

【下一页还有试题……】

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 设 $x\in(-1,1)$, 证明不等式: $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}$.

2. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 令 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(1) 若 $A,B\in(0,+\infty)$, 证明: $\displaystyle\int_A^B\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{g^2(A)}{A}-\frac{g^2(B)}{B}+2\int_A^B\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$;

(2) 若 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le 4\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 **2.** $-5+\sqrt{6}$ (提示: 最小值点为 -5.) **3.** 3 **4.** $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-2)^{2k}}{2^{2k+2}}$ (提示: 可作代换 $t:=x-2$.)

5. $-2\sin x+C$ **6.** $\ln\dfrac{x^2}{x^2+4}+C$ **7.** $2\ln 2-1$ (提示: 定积分定义.) **8.** $2\pi^2$ **9.** 15 (提示: L'Hospital 法则.) **10.** $\ln(1+\sqrt{2})$ **11.** $\dfrac{3}{2}$ **12.** $\dfrac{\pi^2}{2}$ **13.** $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ **14.** $y=\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{x}$ **15.** $y=x-x\ln x$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 函数定义域为 $\mathbb{R}$. (1 分) 求导得 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ (驻点 $x=\pm1$), $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ (拐点横坐标 ±3). 从而函数的单调减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$, 单调增区间为 $(-1,1)$; (2 分) 上凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$, 下凸区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$; (2 分); 极大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 极小值为 $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$; (2 分) 拐点为 $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 和 $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$; (2 分) 曲线有渐近线 $y=0$. (1 分)

2. $\displaystyle\int\frac{\ln x\mathrm{d}x}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)\xlongequal{\text{分部积分}}-\frac{\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)^2}\xlongequal{\text{有理函数}}-\frac{\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)}+C$, 从而广义积分的值为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2}$.

3. $S=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}a(\theta-\sin\theta)\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$(5 分)$=16\pi^2a^2$(5 分). (误求绕 x 轴 $S=\dfrac{64}{3}\pi a^2$, 得 5 分)

4. 由特征根法得方程有通解 $y=C_1+C_2x+C_3\mathrm{e}^x+C_4\mathrm{e}^{-x}$. (4 分) 当 $x\to0$ 时: $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $\mathrm{e}^x=1-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ (2 分), 则有 $y=(C_1+C_3+C_4)+(C_2+C_3-C_4)x+\dfrac{C_3+C_4}{2}x^2+\dfrac{C_3-C_4}{6}x^3+o(x^3)$. 因此解方程得 $C_1=0,C_2=-6,C_3=3,C_4=-3$, 即 $y=-6x+3\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}$. (4 分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 令 $F(x):=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$, 则 $F'(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$ (1 分), $F''(x)=\dfrac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\ge4-1-1>0$ (2 分). 而 $F'(0)=0$, 故下凸函数 $F(x)$ 有最小值点 0, 即得 $F(x)\ge F(0)=0$. (4 分)
注: 也可利用不等式 $\ln(1+x)\le x^2$, 得 $x>0$ 时 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ge -x\ln(1-x)\ge x^2$ ($x<0$ 时有类似的不等式). 再与不等式 $\cos x\ge1-\dfrac{x^2}{2}$ 相加即得原不等式.

2. (1) 分部积分得 $\displaystyle\int_A^B\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_A^B g^2(x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\xlongequal{\text{分部积分}}-\frac{g^2(x)}{x}\bigg|_A^B+2\int_A^B\frac{g(x)g'(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{g^2(A)}{A}-\frac{g^2(B)}{B}+2\int_A^B\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$. (3 分) (2) 取 $A=\varepsilon>0,B=M>\varepsilon$, 由 (1) 得 $\displaystyle\int_\varepsilon^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le\frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon}+2\int_\varepsilon^M\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$. 由 $f(x)$ 连续且 $g(0)=0$ 知: $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon}\xlongequal{\text{L'Hospital}}f(0)\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$, 因此对上式取极限知 $\displaystyle\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le2\int_0^M\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$. 再由 Cauchy 不等式: $\displaystyle\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le2\left(\int_0^M f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, 故 $\displaystyle\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le4\int_0^M f^2(x)\mathrm{d}x$ (注意到被积函数非负), 因此由比较判别法知命题得证. (5 分)

清华大学 2006 级多元微积分期中考试试题

2007.4.20

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 将 $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2-x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ 展成周期为 $T = 2$ 的正弦 Fourier 级数, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x = -\dfrac{5}{2}$ 的值 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right) =$__________.

2. 设函数 $u = \arctan\dfrac{x-y}{x+y}$, 则 $\mathrm{d}u =$__________.

3. 设 $\boldsymbol{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - y \\ y^3 + x \end{pmatrix}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 到自身的映射, 其逆映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 在 $(u,v) = (0,2)$ 处的 Jacobi 矩阵为__________.

4. 设函数 $z = x - 2y + \dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$__________.

5. 设 $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, 则 $\Delta\left(\ln\sqrt{x^2+y^2} - 2xy\right) =$__________.

6. 函数 $u(x,y,z) = \ln(z + \cos(xy))$ 在点 $(1,0,1)$ 处函数值增长最快的方向为__________.

7. 函数 $u = x^2y + y^2z + z^2x$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{\ell} = (1,2,1)$ 的方向导数为__________.

8. 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面方程为__________.

9. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 4 \end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的单位切向量为__________.

10. 曲线 $L: \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ 上某点的切线平行于平面 $x + 3y + 3z = 18$, 则这个点是__________.

11. 设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $x^2y + y^2z + z^2x = 3$ 所确定的隐函数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$__________.

12. 函数 x^y 在 $x = 1, y = 0$ 点的二阶 Taylor 多项式为__________.

13. 函数 $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ 的极大值点为__________, 极小值点为__________.

14. 函数 $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{y+1}$ 在 $(0,0)$ 点处带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展开式为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ \mathrm{e}^x & x \in [0,\pi) \end{cases}$. 将 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数.

2. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义, $f(0,0) = 0$, 且 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = a$, 其中 a 为常数.

【下一页还有试题……】

(1) 讨论函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性;

(2) 当 a 为何值时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微? 并求 $\mathrm{d}f(0,0)$.

3. 设 $f(x,y,z)$ 存在连续偏导数, $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(z-x,z-y)=1$ 确定的隐函数. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 求 xy^2z^3 在条件 $x+y+z=1(x,y,z>0)$ 下的最大值.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 设 z 是变量 x,y 的隐函数, 且由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 定义. 求证:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{[\varphi(z)]^2\frac{\partial z}{\partial x}\right\}.$$

2. (*7* 分) 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 在全平面除原点外处处满足 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0$.

求证: 原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点, 且满足 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $-\dfrac{1}{2}$ (提示: 奇延拓至 $[-1,1]$.) **2.** $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ **3.** $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}$ **4.** $-\dfrac{1}{x^2}$ **5.** 0 **6.** $(0,0,1)$

7. $2\sqrt{6}$ **8.** $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$ **9.** $\pm\dfrac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}$ **10.** $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$ **11.** $-\dfrac{2xy+z^2}{2xz+y^2}$

12. $1+(x-1)y$ **13.** $(-1,-1);\ (1,1)$ **14.** $f(x,y)=1-y+\dfrac{1}{2}(x\ y)\begin{pmatrix}-\frac{\cos\theta x}{\theta y+1}&\frac{\sin\theta x}{(\theta y+1)^2}\\\frac{\sin\theta x}{(\theta y+1)^2}&\frac{2\cos\theta x}{(\theta y+1)^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\exists\theta\in(0,1)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^\pi-1}{\pi}$, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{(-1)^n\mathrm{e}^\pi-1}{\pi}-n^2a_n\Rightarrow a_n=\dfrac{(-1)^n\mathrm{e}^\pi-1}{(n^2+1)\pi}$ $(n\geq 1)$, $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=(-n)a_n$. 故 $f(x)\sim\dfrac{\mathrm{e}^\pi-1}{2\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^\pi-1}{(n^2+1)\pi}(\cos nx-n\sin nx)$.

2. (1) 由已知得 $\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+o(1)$, 即 $f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o(\sqrt{x^2+y^2})\to 0=f(0,0)$, 故函数在原点连续. (2) 由可微性定义, 为使上式具有微分的形式, 只需取 $a=-1$, 此时函数在原点处的微分 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

3. 由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}f_1'+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}-1\right)f_2'=0$ 知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f_2'}{f_1'+f_2'}$, 同理 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f_1'}{f_1'+f_2'}$. 故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{f_{11}''(f_2')^2-2f_1'f_2'f_{12}''+f_{22}''(f_1')^2}{(f_1'+f_2')^3}$.

4. 构造 Lagrange 函数 $L:=xy^2z^3-\lambda(x+y+z-1)$, 求各偏导数得驻点处 $y^2z^3=2xyz^3=3y^2z^2=\lambda$, 解得 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$. 易检验函数有条件最大值, 且最大值为 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{432}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 求导知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}$, 故 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 进而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]=\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\varphi(z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\varphi(z)\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]=\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{[\varphi(z)]^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\}$.

2. 首先证明: 原点 $(0,0)$ 是唯一的极值点. 一方面, 对 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, 取向量 $\boldsymbol{\ell}=\dfrac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. 则 $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\ell}}(x_0,y_0)=0$, 方向导数不为 0 则不为极值点. 另一方面, $\forall x_0>0:\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)>0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-x_0,0)<0$, 故由极限保号性知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\displaystyle\lim_{x_0\to 0^+}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\geq 0$, 相应得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\leq 0$. 因此只能是 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, 同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 因此 $(0,0)$ 是驻点. 由方向导数恒正知 $(0,0)$ 确为极小值点. 此时, 由 $f(x,y)$ 可微知 $\mathrm{d}f(0,0)=0$, 由定义即证得极限为 0.

清华大学 2008 级多元微积分期中考试试题

2009.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $x^2=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cos nx\ (x\in[-\pi,\pi])$, 则 $a_2=$__________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ -2x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成周期为 $T=2$ 的正弦 Fourier 级数 $S(x)$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)=$__________.

3. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上可微, (a,b) 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上给定的一点, $\mathrm{d}f(a,b)=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$, 则极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x,b+x)-f(a,b)}{x}=$__________.

4. 设可微函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 点的梯度为 $(1,2,3)$, 则该函数在 (x_0,y_0,z_0) 点的微分 $\mathrm{d}f(x_0,y_0,z_0)=$__________.

5. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}=$__________.

6. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处函数值增长最快的方向是__________.

7. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f 连续可微, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

8. 函数 $\boldsymbol{f}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x\cos y\\ \mathrm{e}^x\sin y\end{pmatrix}$, 则 $\mathcal{J}\boldsymbol{f}(x,y)=$__________.

9. 曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2-2z-1=0\\ x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0\end{cases}$ 在 $(1,1,2)$ 处的切线方程为__________.

10. 函数 $f(x,y)=x\sin(x+y)$ 在 $(0,0)$ 点带有 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为__________.

11. 函数 $x^2+2xy+y^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值为__________.

12. 设曲面 $z=xy$ 在某一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 则 P_0 点坐标 $(x_0,y_0,z_0)=$__________.

13. 曲面 $z^2=x^2-3y^2$ 在点 $(2,1,1)$ 处的切平面方程为__________.

14. 设 $F(y)=\displaystyle\int_y^{y^2}\frac{\sin(y^2x)}{x}\mathrm{d}x$, 则 $F'(y)=$__________.

15. 函数 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{xy}}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限是否存在? __________(填 “存在” 或 “不存在”).

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 将函数 $f(x)=1-x^2\ (x\in[0,\pi])$ 展成周期为 2π 的余弦 Fourier 级数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy=f(x+y,z)$ 确定, 其中 f 有二阶连续偏导数. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$, 求曲线 C 上距离 xOy 平面最远和最近的点的坐标.

【下一页还有试题……】

4. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $0<a<b$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$.

2. (7 分) 设函数 $u(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\mid 2x^2+3y^2\le 4\right\}$ 上连续, 在区域 D 的内部有二阶连续偏导数, 且满足 $-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u^2$; 在区域 D 的边界 $2x^2+3y^2=4$ 上 $u(x,y)\ge 0$. 证明: 当 $2x^2+3y^2\le 4$ 时, $u(x,y)\ge 0$. (提示: 可用反证法证明.)

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 1 **2.** $\dfrac{7}{8}$ (提示: 利用收敛定理.) **3.** $\sqrt{2}$ (提示: 方向导数.) **4.** $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z$ **5.** 2 **6.** $(1,1)$

7. $yf_1'-\dfrac{y}{x^2}f_2'$ **8.** $\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x\cos y & -\mathrm{e}^x\sin y\\ \mathrm{e}^x\sin y & \mathrm{e}^x\cos y\end{pmatrix}$ **9.** $\begin{cases}3(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0\\ (x-1)-(y-1)+(z-2)=0\end{cases}$ **10.** $f(x,y)=x^2+xy+o(x^2+y^2)$ (提示: 用一元 Taylor 展开较简便.) **11.** 1 **12.** $(-3,-1,3)$ **13.** $2x-3y-2z=-1$

14. $\dfrac{4\sin(y^4)-3\sin(y^3)}{y}$ **15.** 不存在 (提示: 等价无穷小.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(1-\dfrac{\pi^2}{3}\right)$, $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{4\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$. 故 $f(x)\sim 1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\mathrm{d}x$. 取 $x=0$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

2. 对 x 求偏导得 $y=f_1'+f_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}$, 故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-f_1'}{f_2'}$. 同理 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-f_1'}{f_2'}$. 前一式两边再对 y 求偏导得 $1=f_{11}''+f_{12}''\dfrac{\partial z}{\partial y}+f_{21}''\dfrac{\partial z}{\partial x}+f_{22}''\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+f_2'\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 从而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{(f_{11}''-1)(f_2')^2+f_{12}''(x+y-2f_1')f_2'+f_{22}''(x-f_1')(y-f_1')}{(f_2')^3}$.

3. 即要求函数 z 以曲线方程为约束条件时的条件极值 (由问题的几何意义, 最大值与最小值存在, 且均为条件极值点). 构造 Lagrange 函数 $L:=z+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$, 求偏导解得 $x=y=-\dfrac{\mu}{2\lambda}, z=\dfrac{1+3\mu}{4\lambda}$. 代入约束条件得 $(\lambda,\mu)=\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{10}\right),\left(-1,-\dfrac{1}{10}\right)$, 分别对应 $(1,1,1)$ (最近点) 和 $(-5,-5,5)$ (最远点), 即为所求.

4. 将常数 b 置为参变量 t, 并记相应积分为 $I(t)$. 则 $y=\dfrac{\arctan tx-\arctan ax}{x}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{1}{t^2x^2+1}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, 且广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x$ 关于参变量 $t\in[a,+\infty)$ 一致收敛 (Weierstrass 判别法), 因此有 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{t^2x^2+1}=\left.\dfrac{\arctan tx}{t}\right|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2t}$ $(t\in[a,+\infty))$. 进而, $I(b)=I(a)+\displaystyle\int_a^b\frac{\pi}{2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$, 此即为所求广义积分.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\varphi(0,0)\frac{|h|}{h}$, 同理有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\displaystyle\lim_{h\to 0}\varphi(0,0)\frac{|h|}{h}$. 一方面, 若函数可微, 则两偏导数必然存在, 从而只能是 $\varphi(0,0)=0$. 另一方面, 当 $\varphi(0,0)=0$ 时, 有 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. 因此, 仅需验证定义式 $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\varphi(0,0)=0$, 即得函数可微. 命题得证.

2. 若不然, 设 D° 内有函数值小于 0, 则函数的最小值在 D° 内部某点 (x_0,y_0) 处取得. 该点必为极小值点, 故必然有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ge 0$, 即 $u(x_0,y_0)^2\le 0\Rightarrow u(x_0,y_0)=0$, 矛盾. 故假设不成立, 命题得证.

清华大学 2009 级多元微积分期中考试试题

2010.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设函数 $2x+1$ 在 $[0,2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)]$, 则 $S(0)=$__________.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=$__________.

3. 隐函数 $y=y(x), z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定 $(y\neq z)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

4. 设 $f(u,v)$ 连续可微, $w=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, 则 $\mathrm{d}w=$__________.

5. 函数 $x+y^2+z^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 的方向导数为__________.

6. 函数 x^2+2y^2 在点 $(1,1)$ 处函数值下降最快的方向为__________.

7. 设 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$, 则其逆映射的 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(\rho,\varphi)}{\partial(x,y)}=$__________.

8. 设 $z=x^2+y(x)^2$, 其中函数 $y(x)$ 是由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 在点 $(x_0,y_0)=(1,0)$ 附近所确定的隐函数, 则 $z''(1)=$__________.

9. 已知 $F(x+y+z,z,z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 其中 F 为连续可微函数, $F_1'+F_2'+F_3'\neq 0$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

10. 函数 $\dfrac{\sin x}{1-\sin y}$ 在 $(0,0)$ 点处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为__________.

11. 曲线 $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程为__________.

12. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面为__________.

13. 曲线 $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=v\end{cases}$ 在点 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程为__________.

14. 已知 $f(y)=\displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y}\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x$, 则 $f'(y)=$__________.

15. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)^2\mathrm{d}t$, 则 $F'''(x)=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,\frac{\ell}{2}]\\ \ell-x & x\in[\frac{\ell}{2},\ell]\end{cases}$, 将 $f(x)$ 在 $(0,\ell)$ 上展成周期为 2ℓ 的正弦 Fourier 级数, 并求该 Fourier 级数的和函数.

【下一页还有试题……】

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 回答以下问题, 并说明理由:

(1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在? 若存在, 求出这两个偏导数.

(3) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 若可微, 求出函数的微分.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3=x+y+z$ 确定的二阶可微函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 在椭球曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 上寻找位于第 I 卦限的一点 (即 $x,y,z>0$), 使得该点处的切平面与三个坐标轴的交点到原点的距离平方和最小.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*7* 分) 设函数 $f(x,y)$ 在全平面上连续可微, 且满足: (1) 两个一阶偏导数处处相等, 即 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; (2) $f(x,0)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. 证明: $f(x,y)>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2. (*8* 分) 设 $f(x,y)$ 在全平面上二阶连续可微, 其 Hesse 矩阵处处正定. 证明:

(1) 该函数若有驻点, 则此点为最小值点;

(2) 该函数最多只有一个驻点.

答案与提示

(说明: *以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.*)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 3 **2.** 0 (提示: *放缩法.*) **3.** $\dfrac{z-x}{y-z}$ **4.** $-\dfrac{f_1'}{y}\mathrm{d}x+\left(\dfrac{f_2'}{z}-\dfrac{xf_1'}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\dfrac{yf_2'}{z^2}\mathrm{d}z$ **5.** $\dfrac{1}{3}$ **6.** $(-1,-2)$

7. $\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ **8.** 10 **9.** $-\dfrac{F_1'}{F_1'+F_2'+F_3'}$ **10.** $x+xy+o(x^2+y^2)$ **11.** $\begin{cases}x-3y+2z=8\\ 3x-y-2z=0\end{cases}$

12. $x+2y+3z=6$ **13.** $\begin{cases}x-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u-2)-\sqrt{2}\left(v-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ y-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u-2)+\sqrt{2}\left(v-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ z=v\end{cases}$ **14.** $\displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y}x^2\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{y\cos^2 y}\sin y-\mathrm{e}^{y\sin^2 y}\cos y$ **15.** $2f(x)$ (提示: *利用定义.*)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 对 $f(x)$ 作奇延拓, 则 Fourier 系数 $b_n=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\mathrm{d}x$(*4* 分)$=\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{(-1)^k4\ell}{(2k+1)^2\pi^2} & n=2k+1\end{cases}$ $(k\in\mathbb{N})$ (*4* 分), 故形式正弦 Fourier 级数为 $f(x)\sim\dfrac{4\ell}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{\ell}$. (*2* 分)

2. (1) 注意到 $|f(x,y)|\leq|x|+|y|\to0$, $(x,y)\to(0,0)$, 故函数在 $(0,0)$ 处连续. (*3* 分) (2) 由偏导数定义, $f'_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=1$, 同理 $f'_y(0,0)=1$. (*4* 分) (3) 由于极限 $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-(\Delta x+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{-\Delta x\Delta y(\Delta x+\Delta y)}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 显然不存在, 故函数在 $(0,0)$ 处不可微. (*3* 分)

3. 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-3x^2}{3z^2-1}$ (*3* 分), $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-3y^2}{3z^2-1}$ (*3* 分), 进而可求得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6z\dfrac{(1-3x^2)(1-3y^2)}{(3z^2-1)^3}$ (*4* 分).

4. 椭球面在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\dfrac{z_0}{2}(z-z_0)=0$, 在各坐标轴上的截距分别为

$\dfrac{1}{x_0}, \dfrac{1}{y_0}, \dfrac{4}{z_0}$. (*2* 分) 因此, 只需要求函数 $S(x,y,z) := \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{16}{z^2}$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$ 下的条件最小值. (*2* 分) 取 Lagrange 函数 $L := S(x,y,z) + \lambda\left(x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} - 1\right)$ (*3* 分), 容易解得其在第 I 卦限内有唯一驻点 $(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$. 检验知在点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 处 $S(x,y,z)$ 确实有最小值 16. (*3* 分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 对任意定点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, 考虑函数 $g(t) := f(x+t, y-t)$. 易见 g 也连续可微, 求导得 $g'(t) = f'_x(x+t, y-t) - f'_y(x+t, y-t) = 0$, 从而 $g(t)$ 是与 t 无关的常数, 即恒有 $f(x,y) = g(0) = g(y) = f(x+y, 0) > 0$. 命题得证. (*7* 分)

2. (1) 设 (x_0, y_0) 为函数的驻点, 在 (x_0, y_0) 处对 $f(x,y)$ 作 Taylor 展开得 $f(x,y) \xlongequal{\exists \xi, \eta} f(x_0, y_0) + \dfrac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) H(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \geq f(x_0, y_0)$ (这里用到 Hesse 矩阵正定), 故驻点必为最小值点. (*4* 分) (2) 由正定性, (1) 中等号仅在 $(x,y) = (x_0, y_0)$ 处取到, 故函数至多只有一个最小值点, 从而至多有一个驻点. (*4* 分)

清华大学 2010 级微积分 A(2) 期中考试试题

2011.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 将定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数 e^x 展成周期为 2π 的正弦 Fourier 级数, 记 $S(x)$ 为该级数的和函数, 则 $S(0)=$__________.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$__________.

3. 设 $z=f(x+y,x-y)$, 其中 $f\in\mathcal{C}^{(1)}$, 则 $\mathrm{d}z=$__________.

4. 设 $z=x^y$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

5. 方程 $xy+z\ln y+\mathrm{e}^{yz}=\mathrm{e}$ 在 $(0,1,1)$ 点附近确定隐函数 $z=z(x,y)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

6. 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$ 确定的隐函数 (其中 $c^2y\neq b^2z$), 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

7. 函数 $x+y^2+z^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},0\right)$ 的方向导数为__________.

8. 函数 x^2+y^2 在点 $(1,2)$ 处函数值增大最快的方向为__________.

9. 设 $\begin{cases}x=\cos\varphi\cos\theta\\ y=\cos\varphi\sin\theta\end{cases}$, 则其 Jacobi 矩阵的行列式 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|=$__________.

10. 参数曲面 $\begin{cases}x=u+v\\ y=uv\\ z=u\sin v\end{cases}$ 在 $(u,v)=(1,0)$ 处的切平面方程为__________.

11. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程为__________.

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为__________.

13. 曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的单位法向量为__________.

14. 曲线 $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$ 上一点 M 处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$, 则 M 点的坐标为__________.

15. 函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^x(\sin y+\cos y)$ 在 $(0,0)$ 点的带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\pi-x & x\in[-\pi,0]\\ \pi+x & x\in[0,\pi]\end{cases}$ 的 Fourier 级数, 并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

2. 设 $f(u,v)\in\mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$, 隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y=f(x,z)$ 确定, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【下一页还有试题……】

3. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$, 研究 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性、偏导数存在性及可微性 (说明理由).

4. 求函数 $f(x,y)=xy$ 在集合 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $F(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}$, 并且满足 $y\dfrac{\partial F}{\partial x}-x\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\ge\alpha>0$ (其中 α 为常数). 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=+\infty$.

2. (7 分) 设 $D=\big\{(x,y)\big||x|\le a,|y|\le b,a,b>0\big\}$, 二元函数 $f\in\mathcal{C}^{(2)}(D)$, 且在 D 内满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ne 0$. 证明: 函数 $f(x,y)$ 的最大值和最小值只能在 D 的边界上取得.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 **2.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (提示: 取对数.) **3.** $(f'_u+f'_v)\mathrm{d}x+(f'_u-f'_v)\mathrm{d}y$ **4.** $x^{y-1}(1+y\ln x)$ **5.** $\dfrac{-y}{\ln y+y\mathrm{e}^{yz}}$

6. $\dfrac{b^2(a^2z-c^2x)}{a^2(c^2y-b^2z)}$ **7.** 2 **8.** $(2,4)$ **9.** $-\sin\varphi\cos\varphi$ **10.** $y-z=0$ **11.** $\begin{cases}x-y+2z=6\\2x-2y-z=2\end{cases}$

12. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$ **13.** $\pm\dfrac{(1,-1,2)}{\sqrt6}$ **14.** $(-1,1,-1)$ 或 $\left(-\dfrac13,\dfrac19,-\dfrac1{27}\right)$ **15.** $f(x,y)=1+x+y+\dfrac{x^2}{2}+xy-\dfrac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 易得 Fourier 级数为 $f(x)\sim\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 级数在 $x=0$ 处收敛至 $f(0)=\pi$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

2. 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-f'_x}{f'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{f'_z}$, 进而可求得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{f''_{zx}f'_z+f''_{zz}(1-f'_x)}{(f'_z)^3}$.

3. $|f(x,y)|\le\sqrt{x^2+y^2}\to0$, $(x,y)\to(0,0)$, 故函数在 $(0,0)$ 处连续. 由偏导数定义, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}$ 不存在, 而 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{h^4}}{h}=0$. 由可微性蕴含偏导数存在性知: 函数在 $(0,0)$ 处不可微.

4. 由于 $f(x,y)$ 是有界闭集 D 上的连续函数, 故可取到最大值和最小值. 在 D 的内部求函数的驻点, 即得 $(0,0)$, 不在 D 内, 故舍去. 因此, 只需在约束条件 $(x-1)^2+y^2=1$ 下求条件最值. 作 Lagrange 函数 $L:=xy-\lambda[(x-1)^2+y^2-1]$, 解得三个驻点: $(0,0)$, $\left(\dfrac32,\pm\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$. 易检验知函数有最大值 $f\left(\dfrac32,\dfrac{\sqrt3}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt3}{4}$ 和最小值 $f\left(\dfrac32,-\dfrac{\sqrt3}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt3}{4}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $G(t):=F(-\cos t,\sin t,t)$, 则 $G'(t)=\sin tF'_x(-\cos t,\sin t,t)+\cos tF'_y(-\cos t,\sin t,t)+F'_z(-\cos t,\sin t,t)\ge\alpha$ (由题设), 从而 $G(t)=\displaystyle\int_0^t G'(s)\mathrm{d}s+G(0)\ge\alpha t+G(0)\to+\infty$, $t\to+\infty$.

2. 假设函数 $f(x,y)$ 的最值在 D 内部某点处取得, 则该点必为极值点. 然而, 考虑 f 的 Hesse 矩阵 H_f, 由 $\det H_f=-[(f''_{xx})^2+(f''_{xy})^2]<0$ 知 H_f 为不定矩阵, 从而 f 在 D 的内部无极值点. 命题得证.

清华大学 2011 级微积分 A(2) 期中考试试题

2012.4

(本卷后用作期中考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\ln(xy)}=$__________.

2. 函数 $f(x,y)=x^y y^x$ 在 $(1,2)$ 点的全微分为__________.

3. 设函数 $f(u,v)$ 可微, 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ 确定, 则偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

4. 函数 $x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处函数值递增最快的方向为__________.

5. 向量值函数 $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^3y^2,x^3-y^2)$ 的 Jacobi 矩阵 $\mathcal{J}\boldsymbol{f}=$__________.

6. 设 $u=f(x^2+y^2)$, 其中 f 为 $\mathcal{C}^{(2)}$ 类函数, 则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$__________.

7. 设 $\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$ 是由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定的隐函数 $(y\neq z)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

8. 函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(x,y)=(1,1)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为__________.

9. 曲面 $\begin{cases}x=u+\mathrm{e}^{u+v}\\ y=u+v\\ z=\mathrm{e}^{u-v}\end{cases}$ 在 $(2,0,\mathrm{e}^2)$ 点的切平面方程为__________.

10. 曲面 $x^2+y^2+\sin y=z^2$ 在 $(1,0,1)$ 点的切平面方程为__________.

11. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z=xy\end{cases}$ 在点 $(1,2,2)$ 处的切线方程为__________.

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为__________.

13. 已知 $\alpha>0$, 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(x^\alpha)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 α 的取值范围是__________.

14. 设 $p,q,r>0$, 利用 *Beta* 函数, 积分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}\mathrm{d}x$ 可以表示为__________.

15. 设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\mathrm{e}^{\sin(xy)}\mathrm{d}y$, 则 $F'(x)=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的偏导数 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$, 并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性和可微性.

2. 设 φ 为二阶连续可微函数, $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3=\varphi(z)$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 并说明隐函数存在的条件.

3. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的一个内接等腰三角形, 使其底边平行于长轴, 且其面积最大.

【下一页还有试题……】

4. 已知 $0<a<b$, $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-\mathrm{e}^{-b^2x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*7 分*) 证明二元函数的罗尔(*Rolle*)定理: 设二元函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 $D_R: x^2+y^2<R^2$ 内部可微, 在闭圆盘 $\overline{D}_R: x^2+y^2\le R^2$ 上连续. 若 $f(x,y)$ 在圆周 $\partial D_R: x^2+y^2=R^2$ 上取常数值, 则 $f(x,y)$ 在开圆盘 D_R 内必有驻点 (即存在点 $(\xi,\eta)\in D_R$, 使得 $\nabla f(\xi,\eta)=\mathbf{0}$).

2. (*8 分*) 证明: 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]\mathrm{d}x$ 收敛.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 **2.** $2(\ln 2+2)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ **3.** $-\dfrac{f_u'+2xf_v'}{f_u'+2zf_v'}$ **4.** $(1,2,3)$ **5.** $\begin{pmatrix}3x^2y^2 & 2x^3y\\ 3x^2 & -2y\end{pmatrix}$ **6.** $4xyf''(x^2+y^2)$

7. $-\dfrac{z-x}{z-y}$ **8.** $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o\big((x-1)^2+(y-1)^2\big)$ **9.** $\begin{cases}x-2=2(u-1)+(v+1)\\ y=(u-1)+(v+1)\\ z-\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2(u-1)-\mathrm{e}^2(v+1)\end{cases}$

10. $2(x-1)+y=2(z-1)$ **11.** $\begin{cases}(x-1)+2(y-2)+2(z-2)=0\\ z-2=2(x-1)+(y-2)\end{cases}$ **12.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{4}$

13. $(1,+\infty)$ (*提示: 换元法.*) **14.** $\dfrac{1}{r}B\left(\dfrac{p}{r},q\right)$ **15.** $\displaystyle\int_x^{2x}y\cos(xy)\mathrm{e}^{\sin(xy)}\mathrm{d}y+2\mathrm{e}^{\sin(2x^2)}-\mathrm{e}^{\sin x^2}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 由定义知 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=1$ (*2 分*), 同理知 $f_y'(0,0)=-1$ (*2 分*). 因此显然有函数在 $(0,0)$ 点连续 (*3 分*). 由于极限 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-(\Delta x-\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta x\Delta y(\Delta x-\Delta y)}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 显然不存在, 故函数在 $(0,0)$ 处不可微. (*3 分*)

2. 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{\varphi'(z)-3z^2}$ (*2 分*), $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3y^2}{\varphi'(z)-3z^2}$ (*2 分*). 故隐函数存在的条件为 $\varphi'(z)\neq 3z^2$ (*2 分*), 且二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{6z-\varphi''(z)}{\varphi'(z)-3z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{9x^2y^2(6z-\varphi''(z))}{[\varphi'(z)-3z^2]^3}$ (*4 分*).

3. 对椭圆上任一点 (x,y) (不妨设 $x>0>y$), 对应的内接等腰三角形面积为 $S=x(2-y)$. (*2 分*) 作 Lagrange 函数 $L:=x(2-y)+\lambda(x^2+3y^2-12)$ (*3 分*), 解得其驻点为 $(3,-1)$ (*3 分*). 由问题的几何意义知 S 存在条件最大值, 因此点 $(3,-1),(-3,-1),(0,2)$ 连成的椭圆内接等腰三角形即为所求. (*2 分*)

4. 注意到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-\mathrm{e}^{-b^2x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{a^2}^{b^2}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y$. (*3 分*) 易证反常含参积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x$ 在 $[a^2,b^2]$ 上一致收敛, 且被积函数连续 (*1 分*), 故交换积分顺序得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-\mathrm{e}^{-b^2x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{a^2}^{b^2}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x\xlongequal{t:=x\sqrt{y}}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{Poisson 积分}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\sqrt{\pi}(b-a)$. (*6 分*)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 若 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}_R$ 上恒为常数, 则其在 D_R 上梯度处处为 $\mathbf{0}$, 命题显然成立. 否则, $\overline{D}_R$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 有相异的最大值和最小值, 至少其一在开圆盘 D_R 内部某点 (ξ,η) 处取得. 该点必为极值点, 从而 $\nabla f(\xi,\eta)=\mathbf{0}$. (*7 分*)

2. 在瑕点 0 附近, $\displaystyle\int_0^1\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\ln(1+x^p)-\frac{1}{1+x^p}-p\ln x\right]\mathrm{d}x$ 必然收敛. (*3 分*) 而当 $x\to+\infty$ 时, 对被积函数作 Taylor 展开: $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)-\dfrac{1}{1+x^p}=\dfrac{1}{2x^{2p}}-\dfrac{2}{3x^{3p}}+o\left(\dfrac{1}{x^{3p}}\right)$, 当且仅当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛. (*4 分*) 因此, 原广义积分当且仅当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛. (*1 分*)

清华大学 2012 级微积分 A(2) 期中考试试题

2013.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to+\infty}} \dfrac{xy}{x^2+y} =$__________.

2. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处是否连续? _____ (填 "是" 或 "否").

3. 设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\neq 0)$, 则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=$__________.

4. 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且在点 P_0 处沿 $\boldsymbol{\ell}_1=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的方向导数为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 沿 $\boldsymbol{\ell}_2=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ 的方向导数为 $\dfrac{1}{5}$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=$__________.

5. 二元函数 x^2+xy+y^2 在点 $(-1,1)$ 处增长最快的方向为__________.

6. 设 $z(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y}$, 则 $\mathrm{d}z=$__________.

7. 设 $y(x)=f(2x,x^2)$, 其中 f 为可微函数, 则 $y'(x)=$__________.

8. 设 $\begin{cases} f(u,v)=u+v \\ g(u,v)=uv \end{cases}$, $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$, 则 $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=$__________.

9. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y+z=\mathrm{e}^{-z}$ 所确定的隐函数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,\mathrm{e})=$__________.

10. 函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为__________.

11. 曲面 $(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}=3\mathrm{e}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为__________.

12. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的切向量为__________.

13. 曲线 $\begin{cases} x=3t \\ y=3t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 上一点 P_0 处的切线与平面 $x+y+z=3$ 平行, 则 P_0 的坐标为__________.

14. 设函数 $F(x,y)=\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-yt}\mathrm{d}t$ $(x,y>0)$, 则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=$__________.

15. 设 $\varphi(t)=\displaystyle\int_{2t}^{t^2}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ $(t>0)$, 则 $\varphi'(t)=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

2. 设 $\varphi\in\mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, 函数 $z=z(x,y)$ 由 $x+y-z=\varphi(x+y+z)$ 给出, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-y$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$ 上的最大值和最小值.

【下一页还有试题……】

4. 设 $0<a<b$, c 为任意实常数, 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*6 分*) 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, 且 $[f(x,y)-\varphi(y)]\le\psi(x)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$.

2. (*9 分*) 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面上 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微, $f(x,y)>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 且满足: $f''_{xy}(x,y)f(x,y)\equiv f'_x(x,y)f'_y(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 证明:
(1) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f'_x}{f}\right)\equiv 0$;
(2) $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 其中 φ,ψ 为 $\mathbb{R}$ 上二次连续可微的一元函数.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 (提示: 放缩法.) **2.** 是 **3.** $\sin 1-2\cos 1$ **4.** 3 (提示: 表为偏导数的线性组合.) **5.** $(-1,1)$
6. $\mathrm{e}^{x^2y}(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$ **7.** $2f_1'(2x,x^2)+2xf_2'(2x,x^2)$ **8.** $\begin{pmatrix}2&0\\2x&-2y\end{pmatrix}$ (提示: 直接代入或利用乘积性质.)
9. $-\dfrac{2}{\mathrm{e}+1}$ **10.** $1-\big[(x-1)+y\big]+\big[(x-1)^2+2(x-1)y+y^2\big]+o\big((x-1)^2+y^2\big)$ **11.** $x+y+z=3$
12. $(0,1,-1)$ **13.** $(-3,3,-1)$ **14.** $-\displaystyle\int_1^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-yt}\ln t\mathrm{d}t$ **15.** $\dfrac{3\sin t^3-2\sin 2t^2}{t}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $|f(x,y)|\sim\dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y|\le|y|\to 0,(x,y)\to(0,0)$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. 两偏导数显然存在且均为 0, 而 $\dfrac{(f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0))-(0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{\sin[(\Delta x)^2\Delta y]}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac32}}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在, 故不可微.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$, 进而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4\varphi''(x+y+z)}{[1+\varphi'(x+y+z)]^3}$.

3. 在圆盘内部, 求偏导得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-x-1$, 解得驻点 $(1,1)$ 在单位圆盘外, 舍去. 故最值只可能圆盘边界上取得, 而有界闭集上的连续函数必有最值. 因此只需在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下求条件极值. 构造 Lagrange 函数 $L:=x^2-xy+y^2-x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$, 求得 L 的驻点为 $\pm\left(\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\right),(0,-1),(-1,0)$. 检验知最大值为 $2=f(0,-1)=f(-1,0)$, 最小值为 $\dfrac12-\sqrt2=f\left(\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$.

4. 易见 $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\displaystyle\int_a^b\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u$, 即 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$. 又注意到广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}x$ 关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛, 故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{u\mathrm{d}u}{u^2+c^2}=\frac12\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}$ (积分换序时用到了一致收敛性). (注: 一致收敛性这里不要求证明, 仅需明确指出.)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 由极限定义: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_\delta(x_0),\forall y\in U_\delta(y_0):|\varphi(y)-a|<\dfrac{\varepsilon}{2},|\psi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 进而有 $|f(x,y)-a|\le|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-a|\le\psi(x)+|\varphi(y)-a|<\varepsilon$, 由极限定义即证得.

2. (1) 显然有 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f'_x}{f}\right)=\dfrac{f''_{xy}f-f'_xf'_y}{f^2}\equiv 0$. (2) 由 (1) 知函数 $\dfrac{f'_x}{f}$ 与 y 无关, 即 $\dfrac{\partial(\ln f)}{\partial x}=\dfrac{f'_x}{f}=\xi(x)$, 其中 $\xi(x)\in\mathcal{C}^{(1)}$. 由此可积分得 $\ln f(x,y)=\displaystyle\int\xi(x)\mathrm{d}x+\eta(y)$, 或 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\int\xi(x)\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{\eta(y)}$, 这里 $\mathrm{e}^{\int\xi(x)\mathrm{d}x},\mathrm{e}^{\eta(y)}\in\mathcal{C}^{(2)}$.

清华大学 2013 级微积分 A(2) 期中考试试题

2014.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\mathrm{e}^x=xy$ 确定, 则 $\mathrm{d}z=$__________.

2. 函数 $u=x^2+2y-xyz$ 在 $(1,1,0)$ 处的梯度方向为 $\boldsymbol{g}$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{g}}\right|_{(1,1,0)}=$__________.

3. 设 $u=f(x,y,z)$, 其中 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$__________.

4. 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x\right\}$, 则 $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

5. 交换积分次序: $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x}^{3x}f(x,y)\mathrm{d}y=$__________.

6. 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$, 则 $F'(x)=$__________.

7. 设 $D=\left\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\right\}$, 则 $\displaystyle\iint_D\left(1+y\mathrm{e}^{x^{10}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=$__________.

9. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为__________.

10. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 的切线方程为__________.

11. 函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为__________.

12. 在变换 $\begin{cases}u=x\\v=y-x\end{cases}$ 下, 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ 可化为__________.

13. 二元函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处增长最快的方向为__________.

14. $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_0^1\sqrt{x^3+a^2}\mathrm{d}x=$__________.

15. 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[0,+\infty)$ 上是否一致收敛? __________(填 “是” 或 “否”).

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(x+y+z)$ 确定, 其中 f 是 $\mathcal{C}^{(2)}$ 类函数, 且 $f'\ne 1$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2. 用 Lagrange 乘子法求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴和短半轴.

3. 求 $\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x=-2,y=0,y=2,x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成的平面区域.

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\ne 0\\0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ (其中 p 为实数). 讨论:

【下一页还有试题……】

(1) 当 p 满足什么条件时, $f(x,y)$ 在原点连续?

(2) 当 p 满足什么条件时, $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在?

(3) 当 p 满足什么条件时, $f(x,y)$ 在原点可微?

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*10* 分) 设 $x=f(u,v), y=g(u,v), w=h(x,y)$ 均有二阶连续偏导数, 且满足

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u};\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0.$$

(1) 证明: $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=0$;

(2) 证明: $w=h(f(u,v),g(u,v))$ 满足 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

2. (*5* 分) 设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ 上的可微函数, $|f(x,y)|\leq 1$.

求证: 在 D 内存在一点 (x_0,y_0), 使得 $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\leq 16$.

(提示: 作辅助函数 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$.)

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{1+\mathrm{e}^z}$ **2.** 3 **3.** $f'_1+\dfrac{x}{x^2+y^2}f'_3$ **4.** $\dfrac{32}{9}$ (提示: 极坐标代换.) **5.** $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^3\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{3}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ **6.** $\dfrac{2\sin x^2}{x}$ **7.** 2 (提示: 对称性.) **8.** 1 **9.** $x+2y=4$ **10.** $\begin{cases}x+z=2\\ y=-2\end{cases}$

11. $1+x+\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+o(x^2+y^2)$ **12.** $\dfrac{\partial f}{\partial u}=0$ **13.** $(-1,1)$ **14.** $\dfrac{2}{5}$ **15.** 是 (提示: *D-A* 判别法.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f'}{1-f'}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{f''}{(1-f')^3}$.

2. 即求 x^2+y^2 在约束条件 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 下的极值 (由几何意义知条件极值存在). 构造 Lagrange 函数 $L=x^2+y^2+\lambda(5x^2+4xy+2y^2-1)$, 求得极值点处 $\lambda=-1$ 或 $-\dfrac{1}{6}$. 而方程组变形得 $x^2+y^2=-\lambda$ (即 $-\lambda$ 就是相应的极值), 因此椭圆的长半轴为 1, 短半轴为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

3. $\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}y\mathrm{d}x=4-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{\sin t:=y-1}4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=4-\frac{\pi}{2}$.

4. (1) 易放缩得 $p>0$ 时 $f(x,y)$ 在原点连续. (2) 由定义得 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在, 且均为 0. (3) $p>\dfrac{1}{2}$ 时, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0))-(0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 故函数在原点可微.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 易见 $f''_{uu}+f''_{vv}=g''_{vu}-g''_{uv}=0$, 同理 $g''_{uu}+g''_{vv}=0$. (1) $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}=\dfrac{\partial}{\partial u}(f'_u g+g'_u f)=f''_{uu}g+2f'_u g'_u+g''_{uu}f$, 同理 $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=f''_{vv}g+2f'_v g'_v+g''_{vv}f$, 相加得 $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=g(f''_{uu}+f''_{vv})+f(g''_{uu}+g''_{vv})+2(f'_u g'_u+f'_v g'_v)=0$.
(2) $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u}$, 故 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=(h''_{xx}f'_u+h''_{xy}g'_u)f'_u+(h''_{xy}f'_u+h''_{yy}g'_u)g'_u+h'_x f''_{uu}+h'_y g''_{uu}$. 同理可得 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ (仅需将下标中所有 u 改为 v). 同 (1) 相加并合并同类项即得待证式.

2. 令 $g(x,y):=f(x,y)+2(x^2+y^2)$, 则在单位圆上 $g(x,y)\geq 1$, 但 $g(0,0)\leq 1$. 故 $g(x,y)$ 在单位圆内部某极值点 (x_0,y_0) 处取最小值, 从而 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|=4|x_0|, \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|=4|y_0|$. 平方相加即得待证式.

清华大学 2017 级微积分 A(2) 期中考试试题

2018.4.21

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $f(u)$ 可导, 函数 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

2. 曲面 $(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}=3\mathrm{e}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为__________.

3. 设 $f(x,y)=x^2\cos y+y(x-1)\arcsin(\tan x)$, 则 $f'_x(1,0)=$__________.

4. 极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}=$__________.

5. 极限 $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$__________.

6. 极限 $\displaystyle\lim_{y\to0^+}\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}}=$__________.

7. 设 $f(x)$ 可导, $I(y)=\displaystyle\int_0^y(x-y)f(x)\mathrm{d}x$, 则 $I''(y)=$__________.

8. 计算累次积分: $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^2\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t=$__________.

9. 设 $z=\arccos\dfrac{x}{y}$, 则其微分 $\mathrm{d}z=$__________.

10. 设 $f(x,y)=x^y y^x$, 则函数 f 在点 $(1,1)$ 处的微分为 $\mathrm{d}f(1,1)=$__________.

11. 曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\2x^2y+2y-z^2=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程为__________.

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法线方程为__________.

13. 函数 $u=x^2-2xy+3y^2$ 在点 $(1,1)$ 处方向导数的最大值为__________.

14. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-3xyz=1$ 确定的隐函数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

15. 函数 $\cos(x+y)$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项 $o(x^2+y^2)$ 的 Taylor 展开式为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le1$ 上的最大值和最小值.

2. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 上连续可微. 记 $F(y)=\displaystyle\int_0^1 f(x)|y-x|\mathrm{d}x$, 证明函数 $F(y)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 上二次连续可微, 并求 $F''(y)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 回答以下问题 (要求说明理由):

(1) 函数 f 在原点 $(0,0)$ 处是否连续?

(2) 函数 f 在原点 $(0,0)$ 处的两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 是否存在? 求出存在的偏导数.

(3) 函数 f 在原点 $(0,0)$ 处是否可微? 若可微, 求出 f 在原点 $(0,0)$ 处的微分.

【下一页还有试题……】

4. 计算广义积分 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x} \sin x \mathrm{d}x$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 证明函数 $f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上存在最大值, 即存在点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, 使得 $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. 进而求出 $f(x,y)$ 的一切最大值点.

2. (7 分) 设函数 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 二阶连续可微, 且其 Hesse 矩阵处处正定 (即实对称矩阵 $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$ 正定, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$). 证明: 函数 $f(x,y)$ 至多有一个驻点.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 **2.** $x+y+z=3$ (提示: 对称性.) **3.** 2 (提示: 先代入 y 化简.) **4.** 0 **5.** 0 (提示: 放缩法.)

6. $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$ **7.** $-f(y)$ **8.** $\ln 2$ **9.** $\dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$ **10.** $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ **11.** $\begin{cases} 2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0 \\ (x-1)+(y-1)-(z-2)=0 \end{cases}$

12. $x+2y+3z=6$ **13.** 4 **14.** $\dfrac{yz}{z^2-xy}$ **15.** $1-\dfrac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+o(x^2+y^2)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 有界闭域上的连续函数必有最值. 在圆盘内部, 最值点必为极值点, 解得函数有唯一驻点 $(0,0)$. 在单位圆边界上, 构造 Lagrange 函数 $L := x^2 - xy + y^2 + \lambda(x^2+y^2-1)$, 求偏导得条件极值点 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 依次检验各极值点, 得最大值 $f_{\max} = \dfrac{3}{2}$ (在 $\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处取) 和最小值 $f_{\min} = 0$ (在 $(0,0)$ 处取).

2. 由被积函数连续知常义含参积分 $F(y)$ 连续. 由定义: $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{F(y+h)-f(y)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^1 f(x)\big(|x-(y+h)| - |x-y|\big)\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+}\left[\int_0^y f(x)\mathrm{d}x - \int_{y+h}^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{h}\int_y^{y+h} f(x)(2y+h-2x)\mathrm{d}x\right] \xlongequal{\exists \xi \in [y,y+h]} \left[\int_0^y - \int_y^1\right] f(x)\mathrm{d}x + \lim_{h\to 0^+} f(\xi)(2y-2\xi+h) = \left[\int_0^y - \int_y^1\right] f(x)\mathrm{d}x$, 故函数左可导. 同理知函数右可导, 且双侧导数相等, 因此 $F(y)$ 可导且 $F'(y) = \displaystyle\left[\int_0^y - \int_y^1\right] f(x)\mathrm{d}x$. 由变限积分性质, $F'(y)$ 显然可导, 且 $F''(y) = 2f(y)$ (从而 $F(y) \in \mathcal{C}^{(2)}(0,1)$).

3. $|f(x,y)| \sim \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y| \to 0, (x,y) \to (0,0)$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. 两偏导数显然存在且均为 0, 而 $\dfrac{(f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0)) - (0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \dfrac{\sin[(\Delta x)^2\Delta y]}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 在 $(x,y) \to (0,0)$ 时极限不存在, 故不可微.

4. 引入参变量 t, 记 $I(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\sin x\mathrm{d}x$, 则 $y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\sin x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{e}^{-tx}\sin x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, 且广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [1,+\infty)$ 一致收敛 (Weierstrass 判别法), 故可求导得 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{e}^{-tx}(\cos x + t\sin x)}{t^2+1}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{t^2+1}$, 从而 $I(2) = I(1) + \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$ 即为所求.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 考察辅助函数 $\varphi(t) := t^2\mathrm{e}^{-t^2}$, 由于 $\varphi'(t) = -2\mathrm{e}^{-x^2}x(1-x^2)$, 容易验证函数有最大值 $\varphi(\pm 1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 现注意到 $f(x,y) \le (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \le \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 等号当且仅当 $(x,y) = (\pm 1, 0)$ 时取到. 因此, 函数在全平面上存在最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 并且一切最大值点为 $(\pm 1, 0)$.

2. 假设函数有两个相异驻点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2), 则在两驻点处作 Taylor 展开 (带 Lagrange 余项), 得 $f(x,y) = f(x_1,y_1) + H_f(x_1+\theta_1\Delta x, y_1+\theta_1\Delta y)(\Delta x,\Delta y)^\top = f(x_2,y_2) + H_f(x_2+\theta_2\Delta x, y_2+\theta_2\Delta y)(\Delta x,\Delta y)^\top$, $\theta_1,\theta_2 \in (0,1)$. 由 Hesse 矩阵的正定性, $f(x_1,y_1) > f(x_2,y_2) > f(x_1,y_1)$, 矛盾. 故假设不成立, 命题得证.

清华大学 2018 级微积分 A(2) 期中考试试题

2019.4.20

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{x^2+2}{x^2+y^2}}=$__________.

2. 设 $z=y^x$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,\mathrm{e})=$__________.

3. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(2,1)$ 处的微分 $\mathrm{d}f=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$, 则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(2+2t,1+t)-f(2,1)}{t}=$__________.

4. 设函数 f 可导且 $f'(0)=1$, 则函数 $z(x,y)=xy+f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 在点 $(1,0)$ 处的微分 $\mathrm{d}z=$__________.

5. 设函数 $f(u,v)\in\mathcal{C}^{(1)}$, 函数 $w(x,y,z)=f(x-y,x-z)$, 则 $\operatorname{grad} w=$__________.

6. 已知函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿单位向量 $\boldsymbol{\ell}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\ell}}(1,1)=0$, 则单位向量 $\boldsymbol{\ell}=$__________.

7. 设从 $(u_0,v_0)=(2,1)$ 的邻域到 $(x_0,y_0)=(3,4)$ 的邻域中, 向量值函数 $\begin{cases}x=u+v\\ y=u^2v^2\end{cases}$ 有可微的逆向量值函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(3,4)=$__________.

8. 函数 $\dfrac{1}{x+y}$ 在点 $(0,1)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为__________.

9. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+\mathrm{e}^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应点处的切线方程为__________.

10. 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 和曲面 $3x^2+y^2-z^2=0$ 的交线在点 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程为__________.

11. 曲面 $\mathrm{e}^z+xy-z=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程为__________.

12. 已知 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+2y^2+3z^2-2xy-z-7=0$ 确定的隐函数, 则 $z(x,y)$ 的驻点为 $(x_0,y_0)=$__________.

13. 设 $I(y)=\displaystyle\int_y^{y^2}\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x$, 则 $I'(1)=$__________.

14. $\lim\limits_{y\to+\infty}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x=$__________.

15. 已知所有二阶实方阵 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\ x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ 构成一个 4 维线性空间 V. 定义向量值函数 $\boldsymbol{f}:V\to V$, $\boldsymbol{f}(X)=X^2$, 则 $\boldsymbol{f}(X)$ 在 $X_0=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&0\end{pmatrix}$ 处的全微分为__________.

【下一页还有试题……】

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 回答以下问题:

(1) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续? 说明理由.

(2) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $\boldsymbol{u}=(a,b)$ $(a^2+b^2=1)$ 的方向导数是否存在? 若存在, 求出这个方向导数; 若不存在, 说明理由.

(3) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微? 若可微, 求出这个微分; 若不可微, 说明理由.

2. 已知方程 $2z-\mathrm{e}^z+1+\displaystyle\int_y^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t=0$ 在 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$.

3. 设实数 $a\geq 0$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

4. 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

(1) 求 f 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的所有极值; (2) 求 f 在曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值和最小值.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8 分*) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, 且满足 $f(0)\neq -1$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

(1) 求证: 存在 $t_0=1$ 的邻域 U, $x_0=0$ 的邻域 V 以及 $\mathcal{C}^{(1)}$ 类函数 $g:U\to V$, 使得对任意 $(t,x)\in U\times V$, 都有 $\displaystyle\int_x^t f(u)\mathrm{d}u=x$ 当且仅当 $x=g(t)$.

(2) 求 $g'(1)$.

2. (*7 分*) 设 $\alpha>0$, $f\in\mathcal{C}[0,1]$ 且 $f(x)>0$. 根据参数 α 的不同取值, 研究函数 $g(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ $(y\in[0,+\infty))$ 的连续性, 并证明这一结论.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. e^2 **2.** 2 **3.** 5 (提示: 方向导数定义.) **4.** $2\mathrm{d}y$ **5.** $(f_1'+f_2',-f_1',-f_2')$ **6.** $\pm\left(\dfrac{\sqrt2}{2},-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$

7. 2 **8.** $\dfrac{1}{x+y}=1-[(x-1)+y]+[(x-1)+y]^2+o\big((x-1)^2+y^2\big)$ (展开亦可) **9.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

10. $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$ **11.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-0}{0}$ $\left(\text{此式理解为}\begin{cases}2(x-2)=y-1\\ z=0\end{cases}\right)$

12. $(0,0)$ **13.** e **14.** 0 **15.** $\mathrm{d}\boldsymbol{f}\Big|_{X_0}=\begin{pmatrix}2\mathrm{d}x_{11} & \mathrm{d}x_{12}\\ \mathrm{d}x_{21} & 0\end{pmatrix}$ (提示: 其他合理写法均可.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. (1) $|f(x,y)|=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}|xy|\leq|xy|\to 0,(x,y)\to(0,0)$, 故 $f(x,y)$ 在原点处连续. (2) 由方向导数定义得 $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(0,0)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t\sqrt{a^2+b^2}}=0$, 故沿任意方向的方向导数存在且为 0. (3) 易求得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 而 $\left|\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|=\left|\dfrac{\Delta x(\Delta y)^3}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac32}}\right|\leq|\Delta x|\to 0,(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$, 故在原点处可微且 $\mathrm{d}f=0$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-2\sin 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)=\sin 1$, 故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=\left.\dfrac{\mathrm{e}^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{2-\mathrm{e}^z}\right|_{(1,1)}=-2\sin^2 1$.

3. 记 $f(a,x):=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\in\mathcal{C}[0,+\infty)$, 则 $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\mathrm{e}^{-(a+1)x}\in\mathcal{C}[0,+\infty)$, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛 (注意到 $\dfrac{\partial f}{\partial a}\le\mathrm{e}^{-x}$). 这里由 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(a,x)=a$ 知 0 不是瑕点. 因此, $I'(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}\mathrm{d}x=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)x}}{a+1}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{a+1}$. 而 $I(0)=0$, 故 $I(a)=\displaystyle\int_0^a I'(t)\mathrm{d}t=\ln(a+1)$.

4. (1) 由方程 $\nabla f=(3x^2-3y,3y^2-3x)=\mathbf{0}$ 解得驻点 $(x,y)=(0,0),(1,1)$, 其 Hesse 矩阵 $\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}6x&-3\\-3&6y\end{pmatrix}$. 由 $\mathcal{H}_f(1,1)=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$ 正定知 f 在 $(1,1)$ 处有极小值 -1. 而 $\mathcal{H}_f(0,0)=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&0\end{pmatrix}$ 半负定, 且 $f(\varepsilon,\varepsilon)=\varepsilon^2(2\varepsilon-3)<0$, $f(\varepsilon,-\varepsilon^2)=\varepsilon^3(4-\varepsilon^3)>0,\forall\varepsilon\in(0,1)$, 故在 $(0,0)$ 点的任意邻域内 f 既取正值又取负值, 从而不是极值点. 综上, f 有唯一极小值 -1 (在 $(1,1)$ 处取到). (2) 注意到在此曲线上, $f(x,y)=x+y-3xy$, 故可构造 Lagrange 函数 $\mathcal{L}:=x+y-3xy+\lambda(x^2-xy+y^2-1)$, 由 $\nabla\mathcal{L}=\mathbf{0}$ 解得 $(x,y)=(\pm1,\pm1),\left(\dfrac{1\pm\sqrt5}{4},\dfrac{1\mp\sqrt5}{4}\right)$. 依次检验知条件极大值为 $f\left(\dfrac{1\pm\sqrt5}{4},\dfrac{1\mp\sqrt5}{4}\right)=\dfrac54$, 条件极小值为 $f(-1,-1)=-5$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) 即要证明方程 $F(x,t):=\displaystyle\int_x^t f(u)\mathrm{d}u-x=0$ 在 (t_0,x_0) 附近确定了隐函数 $x=g(t)$. 仅需注意到 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-f(x)-1\ne0$ 及 $F(0,1)=0$, 则由隐函数定理立得. (2) 对方程两端求导得 $f(t)-f(x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$, 因此 $g'(1)=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\dfrac{f(1)}{1+f(0)}$.

2. 在一切 $y_0>0$ 处, $g(y)$ 为常义积分, 其被积函数为 y_0 邻域内连续函数的复合, 故对一切 α 仍为连续函数. 现在考察 $y=0$ 处的情形. 易见 $g(0)=0$, 且由连续性知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最小值 m 和最大值 M $(0<m\le M)$. 因此 $my^\alpha\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\le g(y)\le My^\alpha\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac1y\arctan\frac1y$, 故 $my^{\alpha-1}\arctan\dfrac1y\le g(y)\le My^{\alpha-1}\arctan\dfrac1y$. 对上式两端取极限 $y\to0^+$, 即得: (i) $\alpha>1$ 时, $g(y)\to0$, 故在 $y=0$ 处连续; (ii) $\alpha=1$ 时, $\displaystyle\lim_{y\to0^+}g(y)\ge\frac{\pi m}{2}>0$, 故在 $y=0$ 处间断; (iii) $\alpha<1$ 时, $g(y)\to+\infty$, 同样在 $y=0$ 处间断. 综上所述, $g(y)$ 在 $y\in(0,+\infty)$ 上总是连续, 而在 $y=0$ 处 $\begin{cases}\text{连续} & \alpha\in(1,+\infty)\\ \text{间断} & \alpha\in(0,1]\end{cases}$.

清华大学 2005 级多元微积分期末考试试题

2006.6.15

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 将三重积分 $\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$ (其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 4\}$) 化为球坐标下的累次积分: __________.

2. 将三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 1, 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}$) 化为柱坐标下的累次积分: __________.

3. 设 L 是由点 $A(1,0)$ 到点 $B(0,1)$ 的有向线段, 则 $\int_L (x+y)\mathrm{d}\ell=$__________, $\int_{L(A)}^{(B)}(2x-y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=$__________.

4. 设 S 为单位球面 (取外侧为正), 则 $\iint_{S^+} z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________, $\iint_S z^2\mathrm{d}S=$__________.

5. 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(2x+y+z)\boldsymbol{i}+(x+2y+z)\boldsymbol{j}+(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=$__________.

6. 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=$__________.

7. 设 S^+ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{S^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________.

8. 当常数 $\alpha=$__________ 时, 积分 $\int_A^B (x^4+\alpha xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 此时上述被积式 $(x^4+\alpha xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 的原函数为__________.

9. 设 L 为闭曲线 $|x|+|y|=2$ (取逆时针为正向), 则曲线积分 $\oint_{L^+}\dfrac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=$__________.

10. 微分方程 $y''+y'=1$ 的通解为 $y(x)=$__________.

11. 设 S 是三个坐标面与平面 $x+y+z=1$ 围成四面体的外表面, 则 $\iint_{S^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________.

12. 设二阶非齐次线性常微分方程有解 3 及 $3+x^2$, 其对应的齐次线性常微分方程有解 e^x, 则此非齐次线性常微分方程的通解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 计算 $I=\iint_{S^+}(x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+3z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为 $z=x^2+y^2$ 在 $0\le z\le 1$ 部分的外侧.

2. 设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线, 从 z 轴正向看去正向为逆时针方向. 求第二类曲线积分 $\oint_{L^+}\dfrac{(y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.

3. 求二阶连续可微函数 $f(x)$, 使 $f'(0)=0$ 且 $[f(x)+y(x-f(x))]+f'(x)\mathrm{d}y$ 为全微分, 并使该微分式由 $A(0,0)$ 到 $B\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 沿逐段光滑曲线 L 的积分值为 $\dfrac{\pi}{8}$.

4. 求常系数线性齐次常微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y}$ 的通解, 其中 $A=\begin{pmatrix}3&5\\-5&3\end{pmatrix}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 设齐次线性常微分方程组 $\begin{pmatrix}y_1'(x)\\y_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(x)&a_{12}(x)\\a_{21}(x)&a_{22}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}$ 的系数 $a_{ij}(x)\in\mathcal{C}(a,b)$,

$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ 是方程组的两个线性无关解. 证明: Wronsky 行列式 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & z_1(x) \\ y_2(x) & z_2(x) \end{vmatrix}$ 满足 $W(x) = W(x_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}(a_{11}(t)+a_{22}(t))\mathrm{d}t\right]$, $\forall x \in (a,b)$, 其中 $x_0 \in (a,b)$ 为常数.

2. (*8 分*) 设 $B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$, $u \in \mathcal{C}^{(2)}(B)$ 是调和函数 (即 $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). 记 $L_\rho : x^2+y^2=\rho^2$ 是半径为 ρ $(\rho < R)$ 的圆周. 求证:

(1) $\oint_{L_\rho} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\ell = 0$;

(2) 定义 $f(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\oint_{L_\rho} u(x,y)\mathrm{d}\ell$, 则 $f(\rho) \equiv u(0,0)$, $\forall 0 < \rho < R$. (提示: 证明 $f'(\rho) \equiv 0$.)

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^4\mathrm{d}\rho\int_0^\pi f(\rho^2)\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$ **2.** $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\mathrm{d}z$ **3.** $\sqrt{2}$; -1 **4.** 0; $\frac{4\pi}{3}$ (提示: 利用对称性.) **5.** $(0,0,0)$ **6.** $2(xy+yz+zx)$ **7.** $2\pi a^3$ **8.** 4; $\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5+C$
9. 0 **10.** $C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2+x$ **11.** $\frac{1}{2}$ (提示: Gauss 公式.) **12.** $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2x^2+3$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$, 且 $(A,B,C) = (2x,2y,-1)$. 故所求积分可化为 $I = \iint_{D_{xy}}[A(x+z)+3Cz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}[-x^2-3y^2+2x(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 进而由对称性, $\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 故 $I \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} -2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} -2\iint_{D_{\rho\varphi}}\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$.

2. 取 S^+ 为平面 $x+y+z=1$ 被 L 所截区域 (取上侧为正向), 则 $L^+ = \partial S^+$. 因此有 $I \xlongequal{\text{Stokes}} \iint_{S^+}\mathrm{rot}(y+1, z+2, x+3)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S(-1,-1,-1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S = -\sqrt{3}\cdot\sigma(S) = -\sqrt{3}\pi$ (S 为单位球大圆及其内部).

3. 由题意, $0 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = f''(x) - x + f(x)$, 即 $f''(x)+f(x) = x$, 解得通解 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x$. 又 $\frac{\pi}{8} = \int_{L(A)}^{B} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}x^2 + (1-y)(C_1\sin x - C_2\cos x)\right]_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)} = C_1(1-\pi) + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{8}$, $0 = f'(0) = C_2 + 1 \Rightarrow C_2 = -1$, 故所求函数为 $f(x) = \frac{\pi}{8}\cos x - \sin x + x$.

4. 设 $\boldsymbol{y} = (u,v)^\top$, 则由 $v' = -5u+3v$ 得 $u = \frac{3}{5}v - \frac{1}{5}v'$, $u' = \frac{3}{5}v' - \frac{1}{5}v''$, 代入 $u' = 3u+5v$ 得 $v''-6v'+34v = 0$, 解得 $v = \mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$, 进而 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix} C_1\sin 5x - C_2\cos 5x \\ C_1\cos 5x + C_2\sin 5x \end{pmatrix}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $(\ln W)' = \frac{W'}{W} = \frac{1}{W}(y_1'z_2 + y_1z_2' - y_2'z_1 - y_2z_1') = \frac{1}{W}\big[(a_{11}y_1+a_{12}y_2)z_2 + y_1(a_{21}z_1+a_{22}z_2) - (a_{21}y_1+a_{22}y_2)z_1 - y_2(a_{11}z_1+a_{12}z_2)\big] = \frac{(y_1z_2-y_2z_1)(a_{11}+a_{22})}{W} = a_{11}+a_{22}$, 故 $\ln\frac{W(x)}{W(x_0)} = \int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t$, 即得命题.

2. (1) $\oint_{L_\rho}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\ell = \oint_{L_\rho}\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\ell \xlongequal{\text{Green}} \iint_{B_\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, 其中 B_ρ 是 L_ρ 所围的闭圆盘 $x^2+y^2 \le \rho^2$.

(2) 作极坐标代换 $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, 则弧长微分为 $\mathrm{d}\ell = \rho\mathrm{d}\varphi$, 因此 $f(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\mathrm{d}\varphi$. 由 $u \in \mathcal{C}^{(2)}(B)$ 知 $f'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi\rho}\oint_{L_\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathrm{d}\ell$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$ (这里 $\boldsymbol{n}$ 是小弧段的单位外法向量), 因此 $f'(\rho) = 0$, 即 $f(\rho)$ 在 $[0,R]$ 上恒为常数. 又 $\lim_{\rho\to 0+}f(\rho) \xlongequal{\exists(\xi,\eta)\in L_\rho} \lim_{\rho\to 0+}\frac{2\pi\rho\cdot u(\xi,\eta)}{2\pi\rho} = u(0,0)$, 故命题得证.

清华大学 2006 级多元微积分期末考试试题

2007.6.28

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}\mathrm{d}y$, 则 $F'(x)=$__________.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 交换累次积分的顺序 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 将直角坐标系下的累次积分化为极坐标系下的累次积分:
$\displaystyle\int_0^{\frac{R}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$__________.

4. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 所截的面积等于__________.

5. $\displaystyle\oint_{L^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$__________, 其中 $L^+:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 逆时针为正.

6. 已知 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 则 $\displaystyle\iint_S x^2\mathrm{d}S=$__________.

7. 设 L 为曲线 $x^2+y^2=2x(y\geq 0)$, 则 $\displaystyle\int_L\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}\ell=$__________.

8. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$(取外侧为正) 的一部分, 且 S 不与坐标平面相交, 则 S 上的点 (x,y,z) 处的单位外法向量为__________; 如果 S 的面积等于 A, 则 $\displaystyle\iint_{S^+}\frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z}=$__________.

9. 如果平面向量场 $\dfrac{x}{y}(x^2+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-\dfrac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为半平面 $y>0$ 内的保守场, 则 $\lambda=$__________.

10. 设 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}+\mathrm{e}^{yz}\boldsymbol{j}+\sin(zx)\boldsymbol{k}$, 则 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)=$__________.

11. 设常微分方程 $y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$, 则常微分方程 $y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=0$ 的通解是__________.

12. 一阶常微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+4y\end{cases}$ 的通解为__________.

13. 全微分方程 $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x-y)\mathrm{d}y=0$ 的通解为__________.

14. 设 $\varOmega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h$ 所围的闭区域 (其中 $h>0$), 则三重积分 $\displaystyle\iiint_{\varOmega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D|x-y^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$.

2. 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+a^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的值 $(a\in[0,1))$. (不要求讨论广义含参积分的一致收敛性.)

【下一页还有试题……】

3. 计算第二类曲面积分 $\iint_{S^+}(2y+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$, 其正法向量与 z 轴正向成锐角.

4. 设二阶连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=-2,\ f'(1)=1$. 若对于右半平面 $\{(x,y)\mid x>0\}$ 内任意简单光滑闭曲线 L, 恒有 $\oint_L 2yf(x)\mathrm{d}x+x^2f'(x)\mathrm{d}y=0$, 求 $f(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) 考虑二阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+8\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+7x=f(t)$, 其中 $f(t)\in\mathcal{C}(-\infty,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$.
(1) 求该方程的通解 (提示: 可以使用常数变易法);
(2) 证明: 该方程的每个解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

2. (*7* 分) 设函数 $f(x,y)\in\mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ 满足: $f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 证明:
(1) $\oint_{\Gamma_r}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\ell=\pi\left(1-\mathrm{e}^{-r^2}\right)$, 其中 Γ_r 为圆周 $x^2+y^2=r^2$ (取逆时针为正向), 向量 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ_r 的外法向量, 且 $r>0$;
(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

答案与提示

(说明*: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.*)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{2\ln(1+x^2)}{x}$ **2.** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$ **3.** $\displaystyle\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$

4. $4\sqrt{2}\pi$ **5.** 2π (提示*: Green* 公式.) **6.** $\dfrac{4}{3}\pi a^4$ **7.** $2\sqrt{2}$ **8.** $\dfrac{(x,y,z)}{2}$; 48π (提示*: Gauss* 公式.)

9. $-\dfrac{1}{2}$ **10.** $y+z\mathrm{e}^{yz}+x\cos(zx)$ **11.** $y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)$ **12.** ? $\begin{cases}x=2C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}\\ y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}\end{cases}$

13. $x^2+4xy-y^2=C$ **14.** $\dfrac{\pi}{4}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 设 $D_1:=\{(x,y)\in D\mid x\le y^2\}$, $D_2=D\setminus D_1$, 则积分化为 $\iint_{D_1}(y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1(y^2-x)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}(x-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-3x+4x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{30}$.

2. 置参变量 t, 记 $I(t):=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$. 由于 $y=\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+x^2}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{2t}{(1+x^2)(t^2+x^2)}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, 且广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛 (可用 Weierstrass 判别法), 故 $I'(t)=\displaystyle\frac{2t}{t^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{t^2+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\left[\arctan x-\frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t}\right]_0^{+\infty}=\frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{\pi(t-1)}{2t}=\frac{\pi}{t+1}$. 而 $I(0)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$, 故所求含参广义积分为 $I(a)=I(0)+\displaystyle\int_0^a I'(t)\mathrm{d}t=\pi\ln(a+1)$.

3. 曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$, 且 $(A,B,C)=(-2x,-2y,1)$. 故所求积分可化为 $I=\iint_{D_{xy}}[B(2y+z)+Cz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}[x^2-3y^2-2y(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 进而由对称性, $\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 故 $I\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{D_{xy}}-(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}-\iint_{D_{\rho\varphi}}\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$.

4. 由题意, 记 $u:=f(x)$, 则 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}\Rightarrow x^2u''+2xu'-2u=0$. 这是 Euler 方程, 作代换 $t:=\ln x$, 则有 $xu'(x)=u'(t)$, $x^2u''(x)=u''(t)-u'(t)$. 因此 $u''(t)+u'(t)-2u=0$, 解得通解 $u=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-2t}=C_1x+\dfrac{C_2}{x^2}$. 代入定解条件, 解得 $C_1=C_2=-1$, 因此所求函数为 $f(x)=-x-\dfrac{1}{x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) 此方程对应的齐次线性方程有通解 $x(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-7t}$, 取 $x_1(t)=\mathrm{e}^{-t}$, $x_2(t)=\mathrm{e}^{-7t}$ 为齐次方程的一组线性无关特解, 可设非齐次方程有形如 $X(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)$ 的特解, 其中待定函数 c_1,c_2 满足限制条件 $c_1'x_1+c_2'x_2=0$. 同时, 原微分方程可化为 $c_1'x_1'+c_2'x_2'=f(t)$. 联立得一线性方程组, 解得 $c_1'(t)=-\dfrac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$, $c_2'(t)=\dfrac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$, 其中 $W(t):=W[x_1,x_2]=x_1x_2'-x_2x_1'$ 为 Wronsky 行列式. 代入原形式, 知非齐次方程的特解可取为 $X(t)=x_1(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}c_1'(u)\mathrm{d}u+x_2(t)\int_{t_0}^{t}c_2'(u)\mathrm{d}u=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(u)-x_1(t)x_2(u)}{x_1(u)x_2'(u)-x_2(u)x_1'(u)}f(u)\mathrm{d}u$. 因此, 非齐次方程的通解为 $x(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-7t}+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{-7t}\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-7u}}{-7\mathrm{e}^{-8u}-\mathrm{e}^{-8u}}f(u)\mathrm{d}u=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-7t}-\frac{1}{8}\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{e}^{7(u-t)}-\mathrm{e}^{u-t}\right)f(u)\mathrm{d}u$.

(2) 显然, 记 $I(t):=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{e}^{7(u-t)}-\mathrm{e}^{u-t}\right)f(u)\mathrm{d}u$, 仅需证明 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}I(t)=0$. 由 $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}f(u)=0$ 知 $f(u)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上有界, 即 $\exists M>0,\forall u\in[t_0,+\infty):|f(u)|<M$. 又由定义知: $\forall\varepsilon>0,\exists T>0,\forall u>T:|f(u)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此 $|I(t)|\leq\displaystyle\int_{t_0}^{T}\left(\mathrm{e}^{u-t}-\mathrm{e}^{7(u-t)}\right)|f(u)|\mathrm{d}u+\int_{T}^{t}\left(\mathrm{e}^{u-t}-\mathrm{e}^{7(u-t)}\right)|f(u)|\mathrm{d}u<M\left[\mathrm{e}^{u-t}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{7(u-t)}\right]_{t_0}^{T}+\frac{\varepsilon}{2}\left[\mathrm{e}^{u-t}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{7(u-t)}\right]_{T}^{t}=\mathrm{e}^{-t}\cdot M\left(\mathrm{e}^{T}-\mathrm{e}^{t_0}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{7t_0-6t}+\frac{1}{7}\mathrm{e}^{7T-6t}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{6}{7}-\left(\mathrm{e}^{T-t}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{7(T-t)}\right)\right]<\mathrm{e}^{-t}\cdot MA+\frac{3}{7}\varepsilon$, 其中 $A:=\mathrm{e}^{T}+\mathrm{e}^{t_0}+\dfrac{1}{7}\left(\mathrm{e}^{7t_0}+\mathrm{e}^{7T}\right)$. 显然, $\exists T'>0,\forall t>T':\mathrm{e}^{-t}<\dfrac{4}{7MA}\varepsilon$. 取 $T^*=\max\{T,T'\}$, 则 $\forall t>T^*:|I(t)|<\varepsilon$. 由此, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}I(t)=0$. 命题得证.

2. (1) 记 $D_{xy}:=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq r^2\right\}$ 为 $\mathit{\Gamma}_r$ 所围的闭圆盘, 则 $\displaystyle\oint_{\mathit{\Gamma}_r}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\ell=\oint_{\mathit{\Gamma}_r^+}\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\ell\xlongequal{\text{Green}}\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}\iint_{D_{\rho\varphi}}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r}\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}(-\rho^2)=\pi\left(1-\mathrm{e}^{-r^2}\right)$.

(2) 对被积函数作极坐标代换 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$, 则 $\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\rho}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\rho}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$. 故 $\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, 从而 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq1}\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\rho}\rho\mathrm{d}\varphi$. 现考虑内层积分, 对任意固定的极径 ρ, 弧长微分为 $\mathrm{d}\ell=\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi=\rho\mathrm{d}\varphi$, 而 $\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=\nabla f\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)=\nabla f\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$ (这里 $\boldsymbol{n}$ 是小弧段处的单位外法向量), 因此 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\rho}\rho\mathrm{d}\varphi=\oint_{\mathit{\Gamma}_\rho}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\ell\xlongequal{(1)}\pi\left(1-\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)$. 从而原积分化为 $\displaystyle\pi\int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

清华大学 2008 级多元微积分期末考试试题

2009.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}[(x-1)^2+(y+1)^2-2z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$__________.

2. 设曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 在锥体 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 中的部分, 则第一类曲面积分 $\displaystyle\iint_S\frac{z\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=$__________.

3. 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 交换累次积分的顺序: $\displaystyle\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{6-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________.

4. 设 D 为 xOy 平面上以 $(0,0),(0,1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域, 则 $\displaystyle\iint_D\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

5. 设 $D=\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\}$, 则 $\displaystyle\iint_D(x+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

6. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(x,y)=xy+\displaystyle\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中 D 是由曲线 $v=0,v=u^2,u=1$ 所围的区域, 则 $f(x,y)=$__________.

7. 设 L^+ 为曲线 $|x|+|y|=1$ (取逆时针为正向), 则第二类曲线积分 $\displaystyle\oint_{L^+}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=$__________.

8. 设 L 是由点 $A(-1,0)$ 到点 $B(0,1)$ 的直线段, 则 $\displaystyle\int_L(x+3y)\mathrm{d}\ell=$__________.

9. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的锥面部分的面积为__________.

10. 设 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧, $\displaystyle\iint_{S^+}x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________.

11. 全微分方程 $(3x^2+2xy^3)\mathrm{d}x+(3x^2y^2-6y^5)\mathrm{d}y=0$ 的通解为__________.

12. 二阶线性非齐次常微分方程 $y''-2y'+2y=1$ 的通解为__________.

13. 二阶线性齐次常微分方程 $t^2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-4t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+6x=0$ 的通解为__________.

14. 设 $y_1=1+2x^2$, $y_2=1+2x^2+\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解, 且其对应的齐次方程有一个特解 $y_3=x$, 则该废弃此微分方程的通解为__________.

15. 设空间向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+z,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+x,\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+y\right)$, 则 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数, 向量场 $\boldsymbol{F}=(xy^2+x^2y-f(x)y,f(x)y+2x,z)$ 是无旋的 (即 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$). 求 $f(x)$ 以及向量场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数.

2. 计算 $I=\displaystyle\iint_{S^+}xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}$ 在 $0\le z\le 1$ 的部分 (取上侧为正向).

3. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且有 $f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x+2x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

4. 计算 $I=\displaystyle\oint_{L^+}\frac{y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 $L^+:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+z=1\end{cases}$ (从 z 轴正向看逆时针为正向).

【下一页还有试题……】

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 给定积分 $I=\iint_D\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微. 设可逆的连续可微变换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$ 将平面 $\mathbb{R}^2$ 上的区域 D 映成区域 D^*. 求证: 若变换满足条件 $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{\partial y}{\partial v},\dfrac{\partial x}{\partial v}=-\dfrac{\partial y}{\partial u}$, 则 $I=\iint_{D^*}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

2. (7 分) 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内, 函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明: 对上半平面 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\dfrac{8}{3}\pi$ **2.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$ **3.** $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^6\mathrm{d}x\int_0^{6-x}f(x,y)\mathrm{d}y$ **4.** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ **5.** 1 (提示: 对称性.)
6. $\dfrac{1}{8}$ (提示: 函数确定后积分为常数.) **7.** 0 **8.** $\sqrt{2}$ **9.** $\sqrt{2}\pi$ **10.** $4\pi R^5$ (提示: Gauss 公式.)
11. $x^3+x^2y^3-y^6=C$ **12.** $C_1\mathrm{e}^x\cos x+C_2\mathrm{e}^x\sin x+\dfrac{1}{2}$ **13.** $y=C_1t^2+C_2t^3$ (提示: 此为 Euler 方程.)
14. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x+1+2x^2$ **15.** $(1,1,1)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 计算得 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=(0,0,f'(x)y+2-2xy-x^2+f(x))$, 故 $yf'(x)+f(x)=2xy+x^2-2,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 取 $y=0$ 得 $f(x)=x^2-2$, 代入检验知符合题意. 用凑微分法得 $\boldsymbol{F}$ 的势函数为 $U(x,y,z)=\dfrac{1}{2}x^2y^2-y^2+2xy+\dfrac{1}{2}z^2+C$.

2. 曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\}$, 且 $(A,B,C)=\left(2x,\dfrac{y}{2},1\right)$. 故所求积分可化为 $\iint_{D_{xy}}(2x^2z+y^2z+3xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left[(2\rho^2\cos^2\varphi+4\rho^2\sin^2\varphi)(1-\rho^2)+3\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right]\rho\mathrm{d}\rho\xlongequal{\text{周期性}}4\pi\int_0^1 3\rho^3(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\pi$. 因此第二类曲面积分的值为 π.

3. 注意到 $f(x)\xlongequal{u:=xt}\mathrm{e}^x+2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 可导, 两边求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 仍可导, 再求导得 $f''(x)-2f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$. 此方程对应的齐次方程有通解 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$, 可猜得非齐次方程有特解 $\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$, 因此 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2+C_2x+C_1\right)\mathrm{e}^x$. 代入原等式得 $(C_1-1)+(C_2-C_1-1)x=0$, 故 $C_1=1,C_2=2$, 从而所求函数为 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^x$.

4. 取 S^+ 为平面 $x+z=1$ 被 L 所截区域 (取上侧为正向), 则 $L^+=\partial S^+$. 因此有 $I\xlongequal{\text{Stokes}}\iint_{S^+}\mathrm{rot}(y,z,x)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S(-1,-1,-1)\cdot\dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\mathrm{d}S=-2\cdot\sigma(S)=-2\pi$ (这里平面过原点, 故 S 为单位球的大圆及其内部).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $I=\iint_{D^*}\left[(f'_x)^2+(f'_y)^2\right]\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D^*}\left[(f'_xx'_u)^2+(f'_xx'_v)^2+(f'_yy'_u)^2+(f'_yy'_v)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D^*}\left[(f'_xx'_u+f'_yy'_u)^2+(f'_xx'_v+f'_yy'_v)^2-2f'_xf'_y(x'_uy'_u+x'_vy'_v)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D^*}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

2. 条件两端对 t 求偏导得 $xf'_1(tx,ty)+yf'_2(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$, 取 $t=1$ 得 $xf'_1(x,y)+yf'_2(x,y)+2f(x,y)=0$. 进而有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}=-f(x,y)-xf'_1(x,y)-f(x,y)-yf'_2(x,y)=0$, 从而由 Green 公式即证得命题.

清华大学 2009 级多元微积分期末考试试题

2010.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $0<a<b$, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=$__________.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 交换累次积分的顺序: $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________.

3. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 2x\}$, 则 $\displaystyle\iint_D(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

4. 设 Ω 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域, 则 $\displaystyle\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)$ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$__________.

5. 圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=0$ 所截部分的面积为__________.

6. 设 $A(1,0,0),B(1,0,2\pi)$ 为曲线 $L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$ 上两点, 则 $\displaystyle\int_{L(A)}^{(B)}y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z=$__________.

7. 设第二类曲线积分 $\displaystyle\int_{L^+}(1+x^k\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-y^2)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 则 $k=$__________.

8. 微分方程 $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$ 的通解为__________.

9. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 则 $\displaystyle\iint_S\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=$__________.

10. 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的闭圆域 $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$ (取下侧为正向), 则 $\displaystyle\iint_{S^+}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________.

11. 曲面 S 是中心在原点且半径为 a 的球面 (取外侧为正向), 则第二类曲面积分 $\displaystyle\iint_{S^+}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+$ $y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________.

12. 设 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+\mathrm{e}^y\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$, 则 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(x,y,z)=$__________.

13. 三阶常系数齐次线性常微分方程有两个解为 $x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{-x}$, 则该常微分方程的通解为__________.

14. 一阶常微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y\end{cases}$ 的通解为__________.

15. 微分方程 $x^2y''+2xy'-2y=0$ 的通解为__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2-x^2-y^2$ 包围的空间区域, 求 $\displaystyle\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

2. 计算积分 $\displaystyle\oint_{L^+}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 L^+ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$ $(a,b>0)$ 的交线 (从 z 轴正向向下看正向为逆时针方向).

3. 设 S^+ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (取内侧为正向), 求 $\displaystyle\iint_{S^+}\frac{(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4. 设函数 $\varphi(x),\psi(x)$ 连续可导, 且 $\varphi(0)=-2,\psi(0)=1$. 已知对平面上任意一条分段光滑曲线 L, 积分 $I=\displaystyle\int_{L^+}2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y$ 与路径无关, 求函数 $\varphi(x),\psi(x)$.

【下一页还有试题……】

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*7* 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 证明: $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

2. (*8* 分) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, 其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑闭曲面, 函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 在 Ω 上二阶连续可微.

(1) 试证明: $\iint_{\partial\Omega} v\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega v\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_\Omega\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向量;

(2) 若 $u(x,y,z)$ 为调和函数 (即 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,\ \forall(x,y,z)\in\Omega$), 且 $u(x,y,z)\big|_{\partial\Omega}\equiv 0$ (即函数 u 在边界面 $\partial\Omega$ 上取值恒为 0), 证明: $u(x,y,z)=0,\ \forall(x,y,z)\in\Omega$.

答案与提示

(说明*:* 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\ln\dfrac{b}{a}$ **2.** $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$ **3.** $\dfrac{32}{9}$ (提示*:* 极坐标代换.) **4.** $\dfrac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$ (提示*:* 球坐标代换.)

5. 4π **6.** $-\pi$ **7.** 1 **8.** $x\mathrm{e}^y-y^2=C$ **9.** 0 (提示*:* 对称性.) **10.** $\dfrac{\pi}{2}$ **11.** $4\pi a^3$

12. $(xz,-yz,0)$ **13.** $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-x}$ **14.** $\begin{cases}x=C_1+C_2\mathrm{e}^{2t}\\ y=-C_1+C_2\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$ **15.** $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x^2}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}\mathrm{d}z\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 设平面被柱面所截部分为 S^+ (上侧为正), 则 $\partial S^+=L^+$. 故有 $\oint_{\partial S^+}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z\xlongequal{\text{Stokes}}\iint_{S^+}(-2,-2,-2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S\mathrm{d}S=-\dfrac{2(a+b)}{a}\pi R^2$.

3. 易见被积函数的散度为 0, 且单位球 $B^+:x^2+y^2+z^2=1$ (内侧为正) 完全含于 S^+ 内, 故 $\iint_{S^+}\dfrac{(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}\xlongequal{\text{Gauss}}\iint_{B^+}\dfrac{(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}=\iint_{B^+}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\xlongequal{\text{Gauss}}-3\cdot\dfrac{4\pi}{3}=-4\pi$.

4. 由题设知 $\dfrac{\partial}{\partial x}[x^2\psi(y)+2xy-2x\varphi(y)]=2\dfrac{\partial}{\partial x}[x\varphi(y)+\psi(y)]$, 即 $2x\psi(y)+2y^2-2\varphi(y)=2x\varphi'(y)+2\psi'(y)$ 对一切 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 均成立. 取 $x=0$ 得 $\varphi(y)+\psi'(y)=y^2$, 代入原方程得 $\psi(y)=\varphi'(y)$ (取 $x\neq0$), 进而得二阶常微分方程 $\varphi''(y)+\varphi(y)=y^2$. 解得 $\varphi(y)=C_1\cos y+C_2\sin y+y^2-2$, 由初值条件 $\varphi(0)=-2,\varphi'(0)=1$ 得 $C_1=0,C_2=1$. 故所求函数为 $\varphi(x)=\sin x+x^2-2$, $\psi(x)=\cos x+2x$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 由 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{换序}}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$ 知 $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y+\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right]=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$. 命题得证.

2. (1) $\iint_{\partial\Omega}v\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iint_{\partial\Omega^+}v\,\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\xlongequal{\text{Gauss}}\iiint_\Omega\mathrm{div}(v\,\mathrm{grad}\,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 展开即得右侧表达式. (2) 在 (1) 中取 $u=v$, 并注意到: (i) 对调和函数 u, $\iiint_\Omega v\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$; (ii) 由 $u(x,y,z)\big|_{\partial\Omega}\equiv0$ 知 $\iint_{\partial\Omega}u\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$, 故 $\iiint_\Omega\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 从而 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\equiv0$ (由连续性), 故 u 在 Ω 上恒为常数. 再由边界 $\partial\Omega$ 上的取值, 即得 $u(x,y,z)\equiv0$.

清华大学 2010 级微积分 A(2) 期末考试试题

2011.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}}=$__________.

2. 交换累次积分的顺序: $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________.

3. 设平面区域 D 是以原点为圆心的闭单位圆, 则二重积分 $\iint_D y\sin(x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

4. 由六个平面 $3x-y-z=\pm1$, $x+3y-z=\pm1$, $-x-y+3z=\pm1$ 所围的立体体积 $V=$__________.

5. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$, 则 $\oint_L \dfrac{y^2\mathrm{d}\ell}{(x-1)^2+(y-1)^2}=$__________.

6. $\int_{L^+} y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=$__________, 其中 L^+ 为曲线 $y=x^2-1$ 从 $A(0,-1)$ 到 $B(1,0)$ 的部分.

7. $\iint_S (xy+yz+zx+1)\mathrm{d}S=$__________, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2$ 所截得的有限部分.

8. 柱面 $x^2+y^2=1$ 介于曲面 $z=1+x^2$ 与平面 $z=0$ 之间的面积为__________.

9. 曲面 S^+ 为圆柱面 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1, 0\le z\le 2\}$ (取外侧为正向), 则 $\iint_{S^+} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=$__________.

10. 设 $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(x+y+z.xy+yz+zx,xyz)$, 则 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=$__________.

11. 设 $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, 则 $\mathrm{grad}\, f=$__________, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f)=$__________.

12. 微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+3y\end{cases}$ 的通解为__________.

13. 设 $\mathrm{d}u=y\cos(xy)\mathrm{d}x+x\cos(xy)\mathrm{d}y+\sin z\mathrm{d}z$, 则 $u(x,y,z)=$__________.

14. 设 $x^2\mathrm{e}^{2x}$ 为三阶常系数线性齐次常微分方程的一个解, 则该微分方程的通解为__________.

二、计算题 (合计 40 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. (*8* 分) 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 其周长为 a. 计算 $\oint_L (3x+2y+1)^2\mathrm{d}\ell$.

2. (*10* 分) 求 $\iint_{S^+}\dfrac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 S^+ 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧.

3. (*10* 分) 求 $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$.

4. (*12* 分) 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(1)=0$ 且 $f'(1)=0$. 已知在右半平面 $(x>0)$ 内第二类曲线积分

$\displaystyle\int_{L(A)}^{(B)}\left(\frac{9}{x^2}-2f(x)\right)y\mathrm{d}x-(x^2f'(x)+\sin y)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*7* 分) 设 f 为连续函数, 证明: $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2f(z)\mathrm{d}z$.

2. (*8* 分) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为单连通有界闭区域, 其边界 ∂D 逐段光滑, 且取逆时针为正向, 并设 $\boldsymbol{n}$ 为其边界外法向量. 设二阶连续可微函数 $u(x,y)$ 为 D 内的调和函数 (即 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\ \forall(x,y)\in D$). 设 r_0 为 D 内任意一点, $\boldsymbol{r}$ 为 r_0 到 ∂D 上某点的向量, 并记 $r=\|\boldsymbol{r}\|$. 证明:

(1) $\displaystyle u(r_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle}{r}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\ell$;

(2) 如果 L_R 是以 r_0 为圆心、R 为半径的圆, 则 $\displaystyle u(r_0)=\frac{1}{2\pi R}\oint_{L_R}u(x,y)\mathrm{d}\ell$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **2.** $\displaystyle\int_{\frac12}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x f(x,y)\mathrm{d}y$ **3.** 0 (提示: 对称性.) **4.** $\dfrac13$ (提示: 坐标变换.) **5.** 3π **6.** $-\dfrac43$
7. $2\sqrt{2}\pi$ (提示: 对称性.) **8.** 3π **9.** 0 (提示: 用投影法化简, 同时用对称性.) **10.** $1+x+z+xy$
11. $cos(x+y+z)(1,1,1)$; **0** **12.** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}$ **13.** $\sin(xy)-\cos z+C$ **14.** $C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2x\mathrm{e}^{2x}+C_3x^2\mathrm{e}^{2x}$ (提示: 利用特征根重根时的结论.)

二、计算题 (合计 40 分, 共 4 题)

1. 由对称性知 $\oint_L x\mathrm{d}\ell=\oint_L y\mathrm{d}\ell=\oint_L xy\mathrm{d}\ell=0$, 故 $\oint_L(3x+2y+1)^2\mathrm{d}\ell=\oint_L[(9x^2+4y^2)+1]\mathrm{d}\ell=37a$.

2. 设下半单位球为 Ω, 闭圆盘 $S_1^+:x^2+y^2\le1(z=0)$ (上侧为正). 则 $S^+\cup S_1^+=\partial\Omega^+$, 故 $\displaystyle\iint_{S^+}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\left[\iint_{\partial\Omega^+}-\iint_{S_1^+}\right]x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\xlongequal{\text{Gauss; 投影}}\iiint_\Omega(3+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{x^2+y^2\le1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}$.

3. $\displaystyle\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\xlongequal{\text{球坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cdot\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)$.

4. 由题意知 $\dfrac{\partial}{\partial x}[x^2f'(x)+\sin y[=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{9y}{x^2}-2yf(x)\right]$, 即得 $x^2f''(x)+2xf'(x)-2f(x)=-\dfrac{9}{x^2}$, 为一 Euler 方程. 作代换 $t:=\ln x$, $g(t):=f(x)$, 就得到二阶线性微分方程 $g''+g'-2g=-9\mathrm{e}^{-2t}$, 解得 $g(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-2t}+3t\mathrm{e}^{-2t}$, 从而 $f(x)=C_1x+\dfrac{C_2}{x^2}+\dfrac{3\ln x}{x^2}$. 由初值条件 $f(1)=f'(1)=0$ 得 $C_1=-1,C_2=1$, 故 $f(x)=-x+\dfrac{3\ln x+1}{x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 三重积分换序不宜一步完成. 可先交换内层, 再交换外层: $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(z)\mathrm{d}z\int_z^x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-z)f(z)\mathrm{d}z=\int_0^1 f(z)\mathrm{d}z\int_z^1(x-z)\mathrm{d}x=\frac12\int_0^1(1-z)^2f(z)\mathrm{d}z$.

2. (1) 不妨设 $r_0=(0,0)$. 则 $\displaystyle I:=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle}{r}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\ell=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left[u\frac{(x,y)}{r}-\ln r\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\ell$. 易证被积函数散度为 0, 记 $D_\varepsilon:x^2+y^2\le\varepsilon^2$, 则 $\displaystyle I\xlongequal{\text{Gauss}}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_\varepsilon}u\frac{(x,y)}{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\ell-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_\varepsilon}\ln r\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\ell=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D_\varepsilon}u\mathrm{d}\ell-\frac{\ln\varepsilon}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\ell\xlongequal{\exists\xi_\varepsilon\in\partial D_\varepsilon;\ \text{Green}}\frac{L(\partial D_\varepsilon)\cdot u(\xi_\varepsilon)}{2\pi\varepsilon}-\frac{\ln\varepsilon}{2\pi\varepsilon}\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=u(\xi_\varepsilon)$. 取极限 $\varepsilon\to0^+$, 即得 $I=u(0)$, 命题得证. (2) 实际上, 若忽略对曲线积分用中值定理的步骤, 则此式已由 (1) 得证. 注意到 $\displaystyle u(r_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle}{r}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\ell=\int_{\partial D_\varepsilon}u\mathrm{d}\ell$, 仅需将 ε 改记为 R、∂D_ε 改记为 L_R 即可.

清华大学 2011 级微积分 A(2) 期末考试试题

2012.6

(本卷后用作期末考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 交换累次积分的顺序: $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________.

2. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\sin t\\ y=1-\sqrt{2}\cos t\end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$, 则 $\oint_L\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}\ell=$__________.

3. 设 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 则 $\iint_S(x+1)^2\mathrm{d}S=$__________.

4. 设 $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(x+y+z,xy+yz+zx,xyz)$, 则 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=$__________.

5. 设 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+y+z}$, 则 $\mathrm{grad}\,f=$__________, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,f)=$__________.

6. 设函数 $f(x)=x^2+x+2$ 在区间 $[0,2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)]$, 则 $S(0)=$__________.

7. 三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}x^{99}y^{100}z^{101}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$__________.

8. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为__________.

9. 函数 $\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x_0=2$ 点的 Taylor 级数为__________.

10. 已知 $\int_{L^+}\dfrac{x^\lambda\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$ 对上半平面任意光滑闭曲线 L 都成立, 则常数 $\lambda=$__________.

11. 设 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 则 $\iint_{S^+}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\cos y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________.

12. 函数 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开为__________.

13. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=3$ 处收敛, 且当 $x<3$ 时发散, 则 $a=$__________.

14. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$, 则 D 的形心横坐标 $\overline{x}=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 S^+ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\le z\le 1)$ 的下侧, 求 $\iint_{S^+}(x+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(2y-z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$.

2. 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 相交部分的体积.

3. 设 $f(x)=\sin^2(x^2)$.
(1) 求 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开; (2) 求 $f^{(n)}(0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

4. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-nx}(x>0)$, 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x$.

【下一页还有试题……】

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (*8* 分) (1) 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上定义为 $f(x)=\cos\alpha x$ $(\alpha\notin\mathbb{Z})$, 将其展成 Fourier 级数. (提示: $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$);

(2) 利用 (1) 证明: $\cot x=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$.

2. (*7* 分) 设函数 $P(x,y),Q(x,y)\in\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. 在以任意点 (x_0,y_0) 为中心, 任意正数 r 为半径的上半圆周 $\varGamma$ 上, 总有 $\displaystyle\int_{\varGamma}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$. 求证: 在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $P(x,y)\equiv 0,\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$. (提示: 用 Green 公式.)

答案与提示

(说明*: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.*)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$ **2.** 3π **3.** $\dfrac{16}{3}\pi$ (提示*: 对称性.*) **4.** $1+x+z+xy$ **5.** $\mathrm{e}^{x+y+z}(1,1,1)$; 0 **6.** 5 **7.** 0 (提示*: 对称性.*) **8.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{2}$ **9.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n,x\in(1,3)$ (提示*: 换元* $t:=x-2$.) **10.** 1 **11.** $\dfrac{4}{3}\pi$ (提示*: Gauss* 公式.) **12.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$ **13.** 4 **14.** $\dfrac{3}{8}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 设闭圆盘 $S_1^+:x^2+y^2\leq 1(z=1)$ (上侧为正), $\varOmega$ 为 S 与 S_1 所围锥体. 则 $\displaystyle\iint_{S^+}(x+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(2y-z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\left[\iint_{\partial\varOmega^+}-\iint_{S_1^+}\right](x+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(2y-z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\xlongequal{\text{Gauss; 投影}}3\iiint_{\varOmega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0=\pi.$

2. 联立两球方程得交线方程 $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{15}{16}\\ z=\dfrac{1}{4}\end{cases}$. 设平面区域 $D:=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq\dfrac{15}{16}\right\}$, 则 $\displaystyle\iint_D\left[\sqrt{1-x^2-y^2}-\left(2-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{4}}\left(\sqrt{1-\rho^2}+\sqrt{4-\rho^2}\right)\rho\mathrm{d}\rho-\dfrac{15}{16}\cdot 2\pi=\dfrac{13}{24}\pi.$

3. (1) $f(x)=\dfrac{1-\cos(2x^2)}{2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{4n}$. (2) $f^{(n)}=\begin{cases}0 & n\neq 4k\\ (-1)^{k+1}\dfrac{2^{2k-1}\cdot(4k)!}{(2k)!} & n=4k\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$.

4. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\ln 2,\ln 3]$ 上一致收敛, 故可交换积分与求和的顺序: $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}n\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right)=\dfrac{1}{2}.$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}+\dfrac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right]=\dfrac{(-1)^n\cdot 2\alpha\sin\alpha\pi}{(\alpha^2-n^2)\pi}$ $(n\in\mathbb{N})$, 故偶函数 $\cos\alpha x=\dfrac{\sin\alpha x}{\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right]$, $x\in[-\pi,\pi]$. (2) 令 $x=\pi$, 则 $\cot\alpha\pi=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right]$. 再令 $x=\alpha\pi$, 则 $\cot x=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$.

2. 取半圆直径 L, 并设 $\varGamma$ 与 L 围成半圆域 D, 则 $\displaystyle\int_L(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\int_{\varGamma\cup L}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)\xlongequal{\text{Gauss}}\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\exists(\xi,\eta)\in D}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\cdot\dfrac{1}{2}\pi r^2$, 而 $\displaystyle\int_L(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\mathrm{d}x\xlongequal{\exists\zeta\in(x_0-r,x_0+r)}P(\zeta,y_0)2r$. 故 $P(x_0,y_0)=\displaystyle\lim_{r\to 0^+}P(\zeta,y_0)=\lim_{r\to 0^+}\dfrac{\pi r}{4}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}=0$, 故 $P(x,y)\equiv 0$, 进而再由上式得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$.

清华大学 2012 级微积分 A(2) 期末考试试题

2013.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设区域 $D=\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\}$, 则 $\iint_D \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

2. 交换累次积分的顺序: $\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2-1}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=$__________.

3. 设区域 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 则 $\iint_D x\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

4. 曲线 $x+y=a, x+y=b, x-y=\alpha, x-y=\beta$ (其中 $a<b, \alpha<\beta$) 所围成区域的面积为__________.

5. 设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=2$ 围成的空间区域, 将三重积分 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为球坐标系下的累次积分: $I=$__________.

6. 设 Γ 是空间圆柱螺线段 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \ \ (t\in[0,2\pi]) \\ z=t \end{cases}$, 则 $\int_\Gamma \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}\ell=$__________.

7. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 则 $\iint_S (x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S=$__________.

8. 设 Γ^+ 是平面上起点为 $(0,0)$、终点为 $(1,1)$ 的直线段, 则 $\int_{\Gamma^+} x^2y\mathrm{d}x+y^3\mathrm{d}y=$__________.

9. 设 S^+ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧, 则 $\iint_{S^+}\dfrac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=$__________.

10. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(xy, \mathrm{e}^z\sin y, -yz)$, 则 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=$__________.

11. 微分方程 $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$ 的通解为__________.

12. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\dfrac{n+1}{n}$ 收敛, 则参数 p 的取值范围是__________.

13. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^n$ 的收敛域为__________.

14. 函数 $\int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开为__________.

15. 设 $f(x)=x^2, x\in[0,1)$, 其形式 Fourier 级数为 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x$, 则 $S(-1)=$__________.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求曲面积分 $\iint_{S^+}\dfrac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 S^+ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

2. 已知 L^+ 是第 I 象限中从点 $(0,0)$ 起, 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿上半圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的有向曲线段. 求第二类曲线积分 $\int_{L^+}\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(2xy+x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$.

【下一页还有试题……】

3. 将函数 $f(x)=1-x^2(0\le x\le \pi)$ 展开成余弦 Fourier 级数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

4. 求 $f(x)=\dfrac{x^2+5x+5}{(x+1)(x+2)^2}$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开, 并求其收敛半径.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) (1) 证明: $\displaystyle\iint\limits_{0\le x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+xy}=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$; (2) 证明: $\displaystyle\iint\limits_{0\le x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+xy}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

2. (7 分) 设 $D_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le x^2+y^2\le 1\}$, $D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid \varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1\}$, $\widehat{\boldsymbol{n}}$ 为 ∂D_ε 的单位外法向量. 已知 $u(x,y)$ 在 D_0 上有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4$. 证明:
(1) 对于任意的 $\varepsilon\in(0,1)$, 均有等式 $\displaystyle\oint_{\partial D_\varepsilon}\left[\ln(x^2+y^2)\frac{\partial u(x,y)}{\partial\widehat{\boldsymbol{n}}}-u(x,y)\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial\widehat{\boldsymbol{n}}}\right]\mathrm{d}\ell=4\iint_{D_\varepsilon}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 成立;
(2) 如果 $u(x,y)=4$, $\forall(x,y)\in\partial D_0$, 则有 $u(0,0)=3$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 (提示: 对称性.) **2.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y-1}^{\sqrt{y+1}}f(x,y)\mathrm{d}x$ **3.** 0 (提示: 奇函数和对称性.) **4.** $\dfrac{(b-a)(\beta-\alpha)}{2}$ **5.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho$ **6.** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3$ **7.** $8\pi R^4$ (提示: 化为对称形式.) **8.** $\dfrac{1}{2}$ **9.** $4\pi R$ (提示: Gauss 公式.) **10.** $\mathrm{e}^z\cos y$ **11.** $x\mathrm{e}^y-y^2=C$ **12.** $(0,+\infty)$ **13.** $(-1,1]$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n$ (提示: 逐项求导与逐项积分.) **15.** 0

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 注意到 $\operatorname{div}\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$. 记 $\Omega:=\{(x,y,z)\big|2x^2+2y^2+z^2\le 4\}$, $B:=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$, 则 $B\subset\Omega$ 且 $\partial S^+=\partial\Omega^+$. 因此积分可化为 $\displaystyle I:=\left[\iint_{\partial(\Omega\setminus B)^+}+\iint_{\partial B^+}\right]\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=}\iint_{\partial B^+}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iiint_{\Omega\setminus B}0\mathrm{d}V\overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=}\iiint_B 3\mathrm{d}V=3V(B)=4\pi R^2$.

2. 设 K^+ 表示从 $(2,0)$ 到 $(0,0)$ 的有向线段, D 是 $L^+\cup K^+$ 包围的闭区域; $D_1:=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,x,y\ge 0\}$ 为四分之一圆, $D_2:=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2x,y\ge 0\}$ 为半圆, $D=D_1\setminus D_2$. 又 $\displaystyle\int_{K^+}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=0$, 故 $\displaystyle\int_{L^+}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_{\partial D^+}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y\overset{\text{Green}}{=\!=\!=}\iint_D 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\iint_{D_1}-\iint_{D_2}\right]2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\overset{t:=\cos\varphi}{=\!=\!=}\frac{16}{3}\int_0^1(1-u^3)\mathrm{d}u=4$.

3. $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$, $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$. 故 $f(x)\sim 1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\mathrm{d}x$. 取 $x=0$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{n+1}{2^{n+2}}\right)x^n$, $x\in(-1,1)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) 累次积分得 $\displaystyle\iint\limits_{0\le x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+xy}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(xy)}{1+xy}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\ln(1+xy)\Big|_{y=0}^{y=1}=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$. (2) 设 $\displaystyle F(x):=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$, 则 $\displaystyle xF'(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, 逐项积分得 $\displaystyle F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n$, $x\in[-1,1]$. 因此 $\displaystyle\iint\limits_{0\le x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+xy}\overset{(1)}{=\!=}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=F(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. 命题得证.

2. (1) $\displaystyle\oint_{\partial D_\varepsilon}\left[\ln(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial\widehat{\boldsymbol{n}}}-u\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial\widehat{\boldsymbol{n}}}\right]\mathrm{d}\ell=\oint_{\partial D_\varepsilon}\left[\ln(x^2+y^2)\nabla u-u\nabla\big(\ln(x^2+y^2)\big)\right]\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\ell\overset{\text{Green}}{=\!=\!=}\iint_{D_\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial y}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_\varepsilon}\left[\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-u\cdot\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}+\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-u\cdot\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]=4\iint_{D_\varepsilon}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (2) 注意到条件类似于调和函数, 下证明形似调和函数均值性质的结论. 记 $C_\rho:=\big\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\rho\big\}$ 是半径为 ρ 的圆, $\displaystyle f(\rho):=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{\partial C_\rho}u(x,y)\mathrm{d}\ell$. 为求 $f'(\rho)$, 作极坐标代换 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$, 则弧长微分为 $\mathrm{d}\ell=\rho\mathrm{d}\varphi$, 因此 $\displaystyle f(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\mathrm{d}\varphi$. 由 $u\in\mathcal{C}^{(2)}(D_0)$ 知 $\displaystyle f'(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{\partial C_\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathrm{d}\ell=\oint_{\partial C_\rho}\frac{\partial u}{\partial\widehat{\boldsymbol{n}}}\mathrm{d}\ell\overset{\text{Green}}{=\!=\!=}\frac{1}{2\pi\rho}\iint_{C_\rho}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}S=2\rho$, 这里用到 $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi=\frac{\partial f}{\partial\widehat{\boldsymbol{n}}}$. 又 $f(1)=4$, 故 $\displaystyle f(\rho)=4+\int_1^\rho 2r\mathrm{d}r=3+\rho^2$ $(\rho>0)$. 又 $\displaystyle\lim_{\rho\to0^+}f(\rho)\overset{\exists(\xi,\eta)\in\partial C_\rho}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{\rho\to0^+}\frac{2\pi\rho\cdot u(\xi,\eta)}{2\pi\rho}=u(0,0)$, 即得 $u(0,0)=3$. 命题得证.